



De la Física a la Música

Fuerzas, Atlas y Herramientas Musicales

Bertrand Kientz y José María Castelo

Contenido

- Introducción
- Historia y motivación
- Conjuntos de notas y semillas
- Modelo de equilibrio: la balanza musical
- Medida del reparto
- Ejemplos prácticos
- Los Atlas Armónico y Rítmico
- Herramientas musicales
- Conclusiones

Introducción

¿Os habéis preguntado alguna vez cuántas escalas o ritmos existen en la música?

¿Por qué se usan más ciertas escalas o ritmos?

Para tratar de responder a estas cuestiones hemos empleado dos enfoques:

- Físico: basado en el modelo de la balanza
- Matemático: basado en la noción de distancia entre dos conjuntos de notas.

Ambas perspectivas permiten parametrizar los conjuntos de notas según su:

- Ángulo de equilibrio (θ)
- Grado de reparto (ρ)

Ordenándolos según estos parámetros como resultado construimos los Atlas musicales:

- El Atlas Armónico para las escalas
- El Atlas Rítmico para los ritmos.

Además, en el proceso de responder a las preguntas anteriores, se ha desarrollado dos herramientas para la práctica y el estudio musical:

- La Calculadora Armónica Universal (CAU) es una herramienta que hace sencillas muchas operaciones armónicas, como transportar escalas, construir acordes, etc.
- El Transportador de Ritmos (TDR) es una herramienta que facilita el entrenamiento de los desplazamientos rítmicos. Permite a cualquier persona de 3 a 103 años tocar ritmos sencillos, pero también ofrece a los más inquietos unos retos desafiantes que superar.



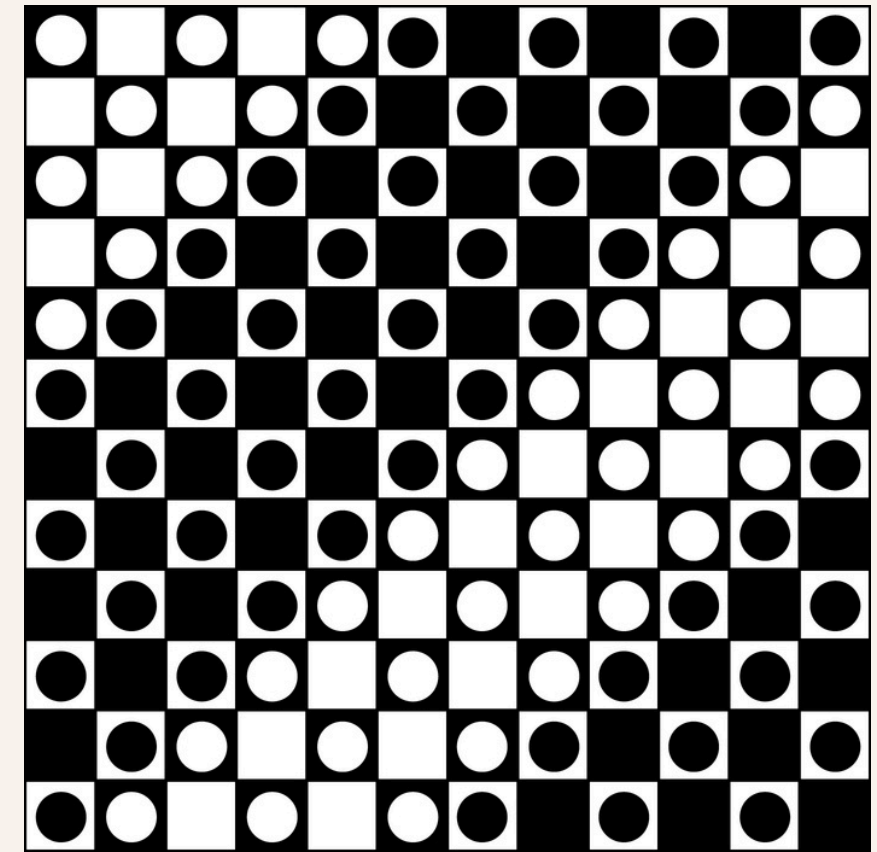
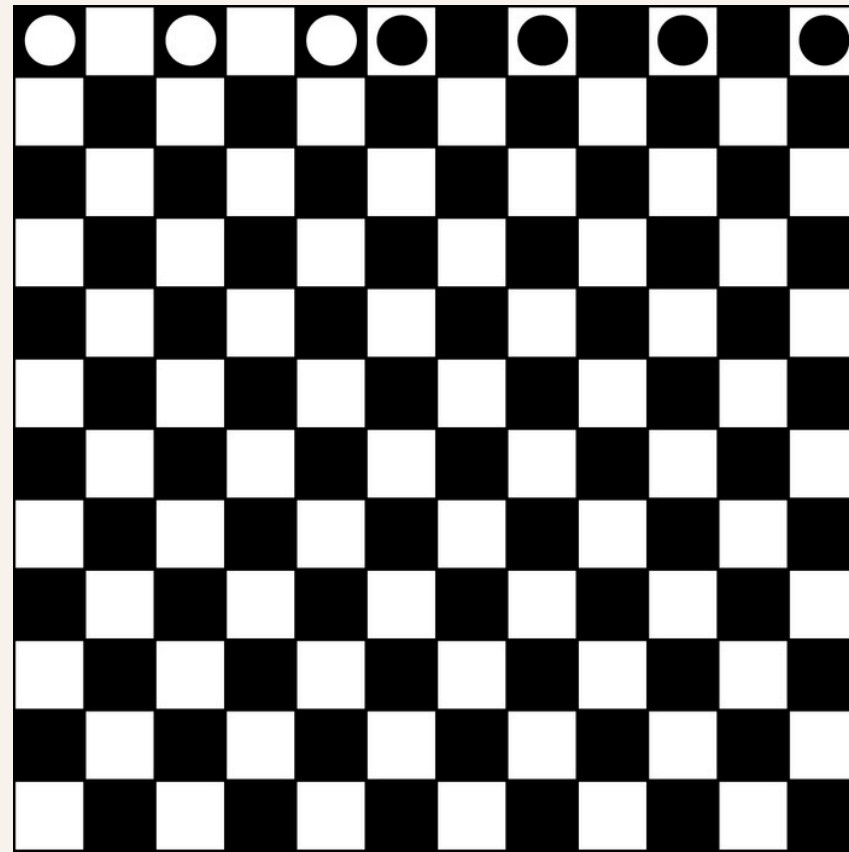
Historia y motivación

Historia breve

- Junto con José Manuel Alcántara (Pep)
- Origen del TDR



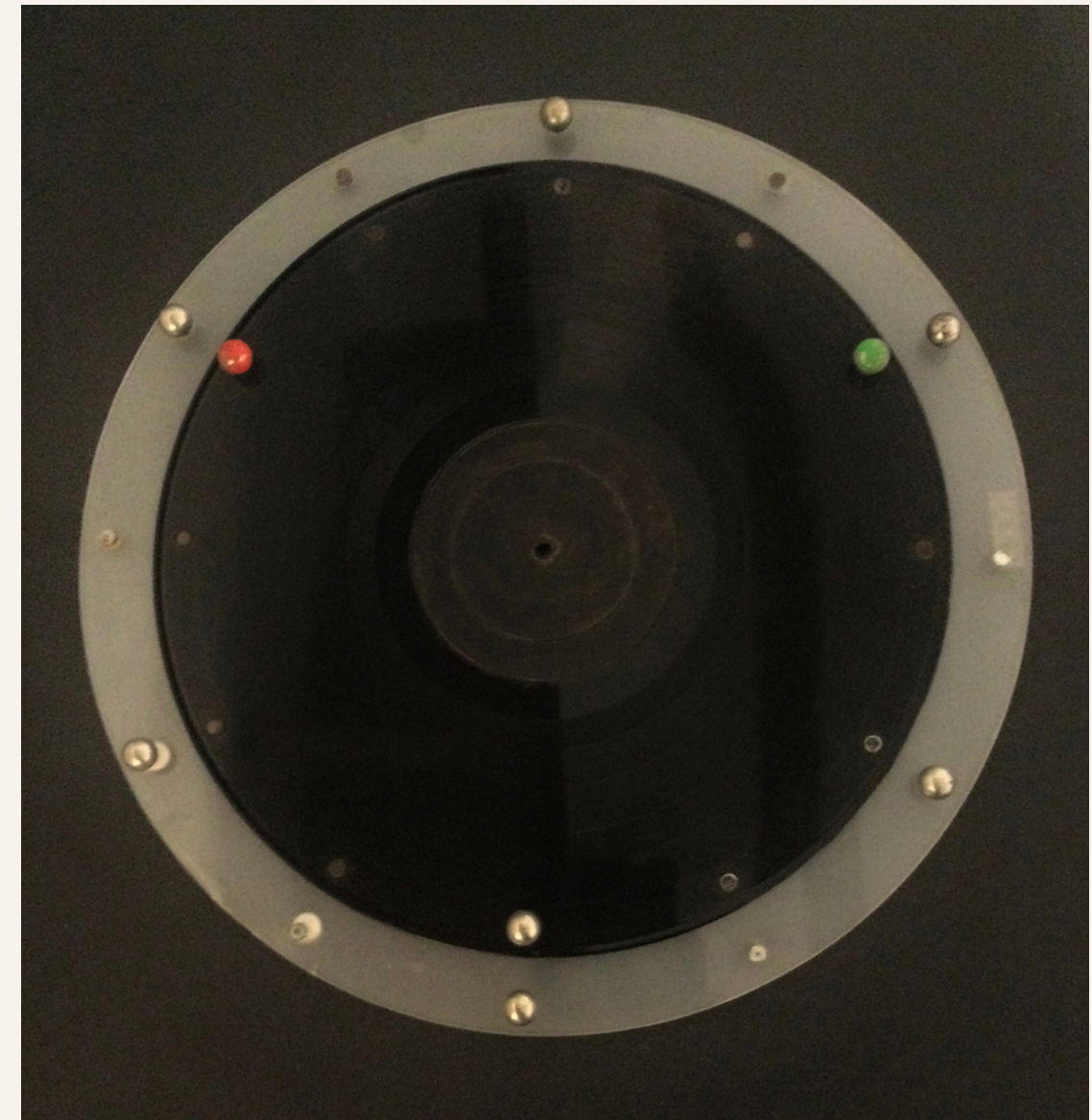
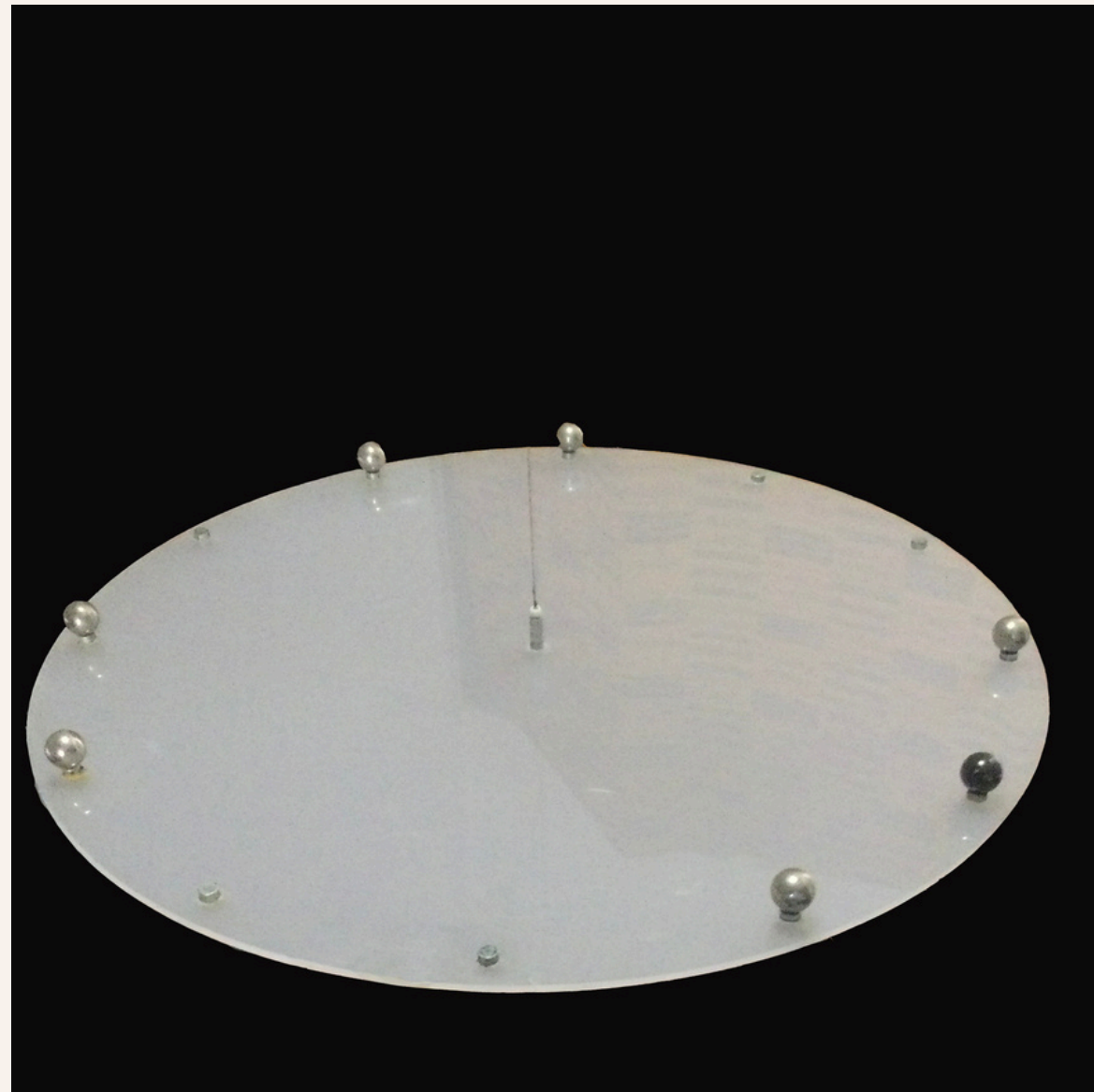
- Origen del TDR (sigue)



- Prototipo del TDR



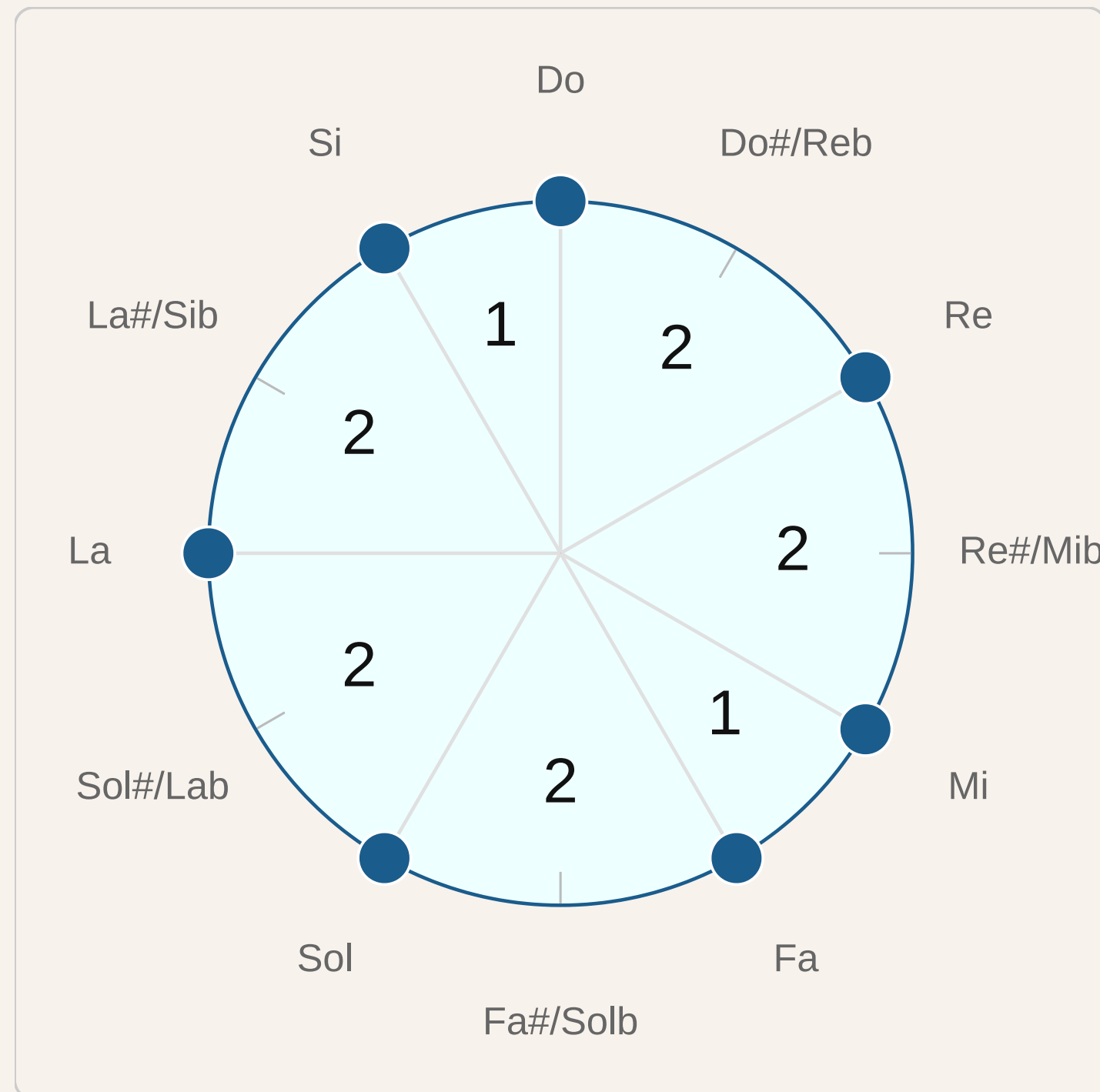
Origen de los Atlas y de la CAU: la balanza musical y el doble disco



Conjuntos de notas y conjuntos semilla



Representación circular



Ejemplo: Escala de Do mayor

Posición de N notas con base B:

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}), \quad x_i \in \{0, \dots, B-1\}$$

Intervalos (en unidades de semitono):

$$\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1}), \quad v_i = [x_{i+1}]_N - x_i]_B$$

Cadena de B bits:

$$\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{B-1}), \quad b_i \in \{0, 1\}$$

Ejemplo: Escala de Do mayor (B=12, N=7)

$$\mathbf{x} = (0, 2, 4, 5, 7, 9, 11)$$

$$\mathbf{v} = (2, 2, 1, 2, 2, 2, 1)$$

$$\mathbf{b} = (1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$$

Conteo de conjuntos de notas

Número de conjuntos formados por N notas, tomadas de B notas posibles:

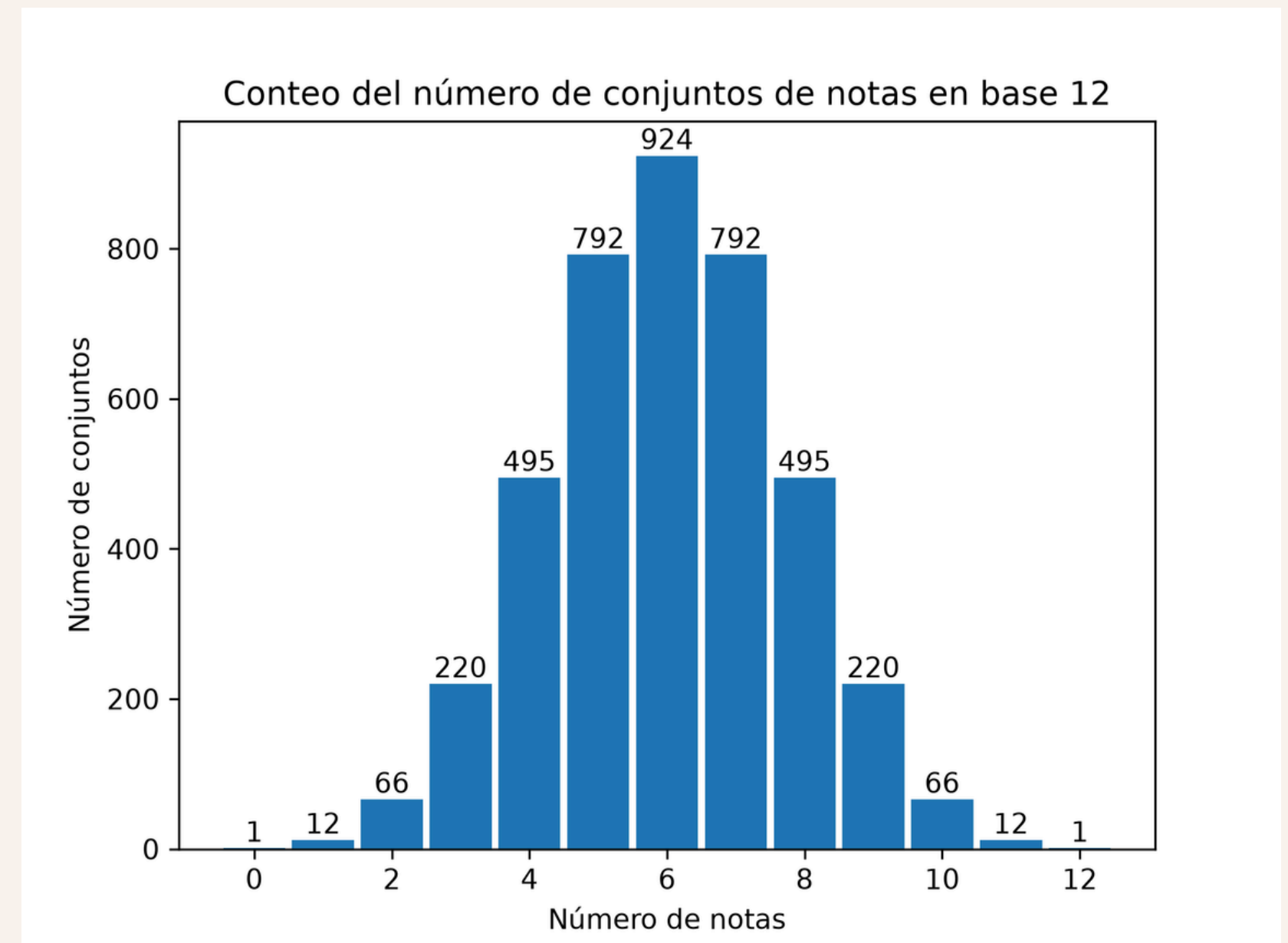
$$\binom{B}{N} = \binom{B}{B-N} = \frac{B!}{N!(B-N)!}$$

Simetría alrededor de $N=B/2$

Con una base B, el número total de conjuntos es:

$$\sum_{N=0}^B \binom{B}{N} = 2^B$$

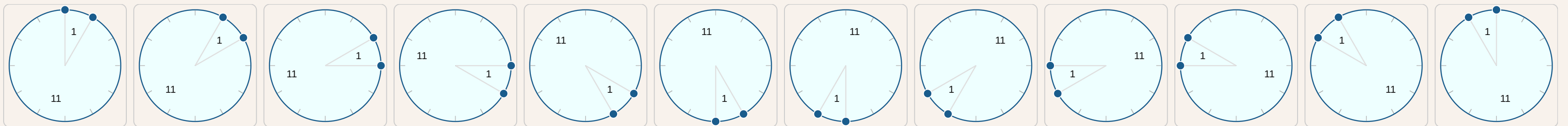
Para $B=12$ hay 4096 conjuntos de notas, compuestos de 0 a 12 notas.



Conjuntos semilla

Representamos todas las transposiciones de un conjunto mediante uno solo, denominado conjunto semilla $\rightarrow$ su elección es arbitraria

La estructura fundamental de un conjunto de notas es su sucesión de intervalos, independientemente de la posición de las notas



Ejemplo: Sucesión (1, 11) $\rightarrow$ semitono, séptima mayor

Generación de los conjuntos semilla

Número decimal asociado a una cadena de bits:
$$n = \sum_{k=0}^{B-1} b_k 2^{B-1-k}$$

Método de generación por fuerza bruta: (Suma ponderada)

1. Generar cadenas de B bits con N "1"
2. Para cada cadena:
 - a. Calculamos todas sus rotaciones
 - b. Si n es máximo entre todas las rotaciones → Es una semilla

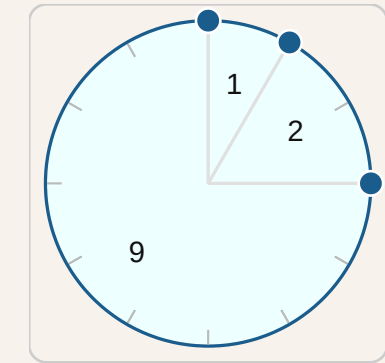
Garantiza: la posición 0 siempre ocupada y cada semilla es única

Las posiciones ocupadas están lo más cerca posible del origen

Alternativa más inteligente: Algoritmo de Duval

- Genera todas las semillas de bases 0 a B, una a una
- Relacionado con la ordenación lexicográfica de palabras compuestas por un alfabeto → "1" y "0"

Ejemplo:



Cadena de bits, n

'110100000000', 3328

'011010000000', 1664

'001101000000', 832

'000110100000', 416

'000011010000', 208

'000001101000', 104

'000000110100', 52

'000000011010', 26

'000000001101', 13

'100000000110', 2054

'010000000011', 1027

'101000000001', 2561

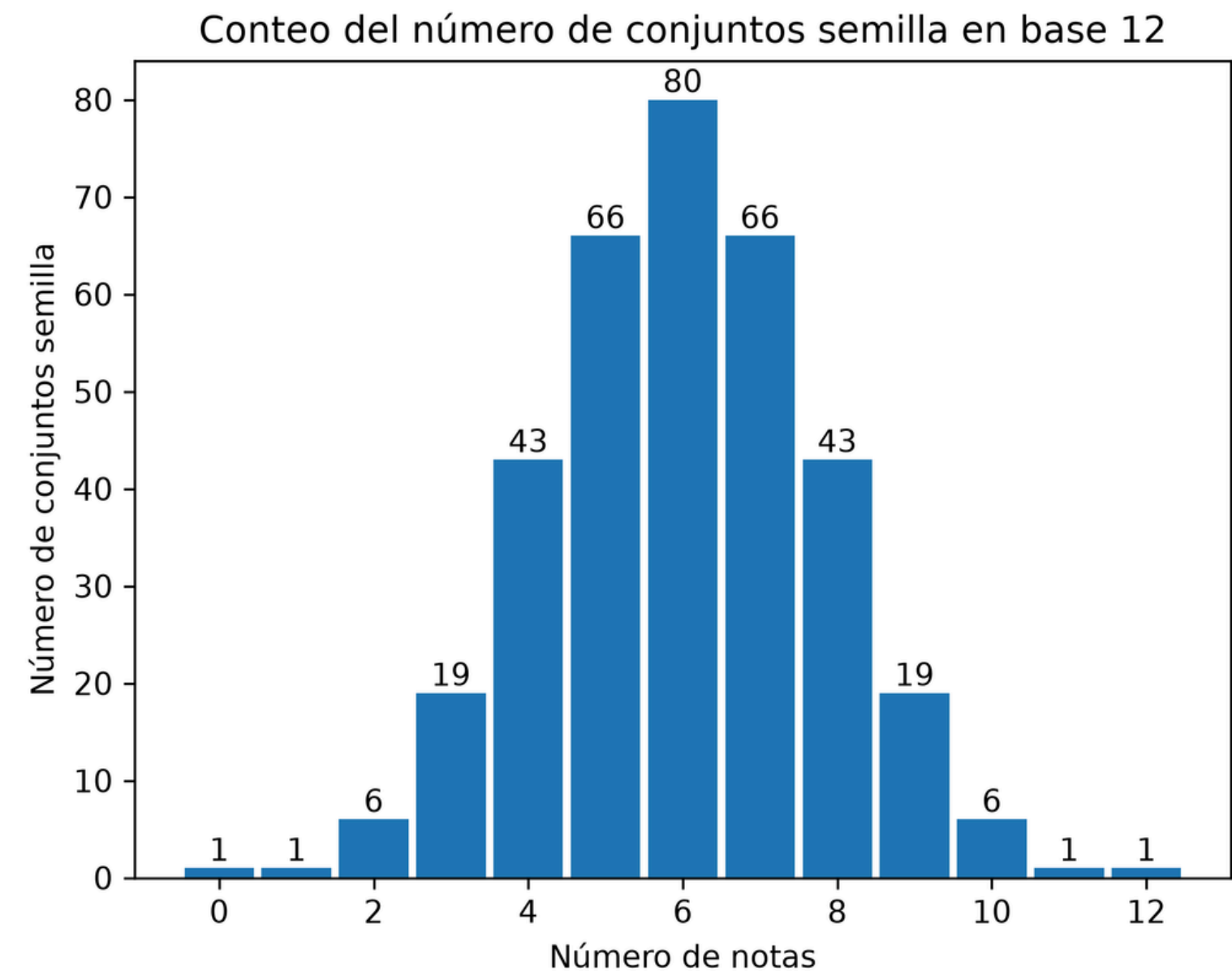
Conteo de conjuntos semilla

Con una base de 12 notas hay un total de 352 conjuntos semilla

Nosotros realizamos un conteo numérico

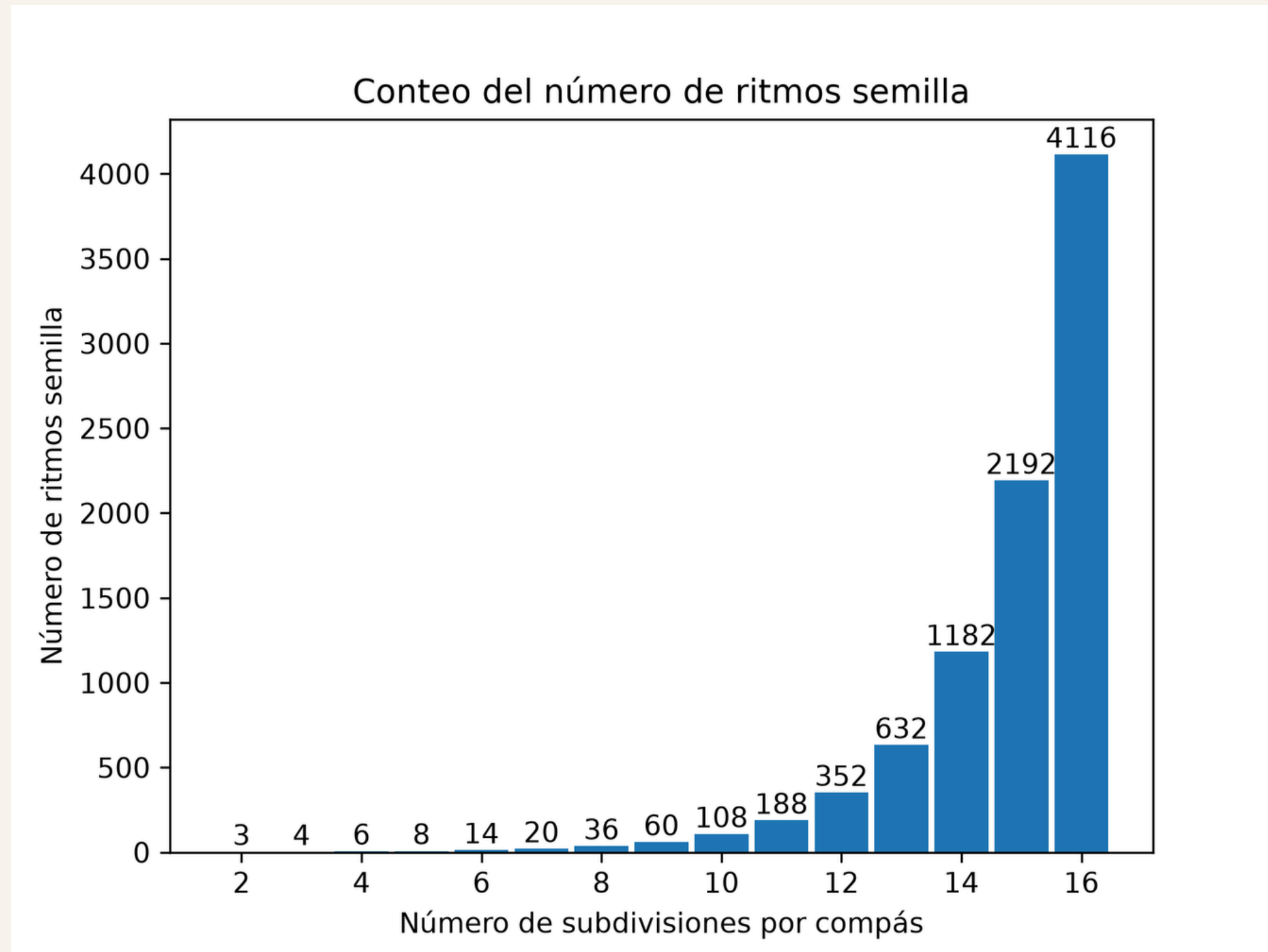
Existe una fórmula derivada del Lema de Burnside o Cauchy-Frobenius:

- Se tienen $\binom{B}{N}$ configuraciones de N elementos en B posiciones del círculo.
- El grupo cíclico $\mathbb{Z}_B$ actúa sobre ellas mediante rotaciones.
- Conteo del número de órbitas (clases de equivalencia bajo rotaciones).



Conteo de “ritmos semilla”

Crecimiento exponencial



Modelo de equilibrio: la balanza musical



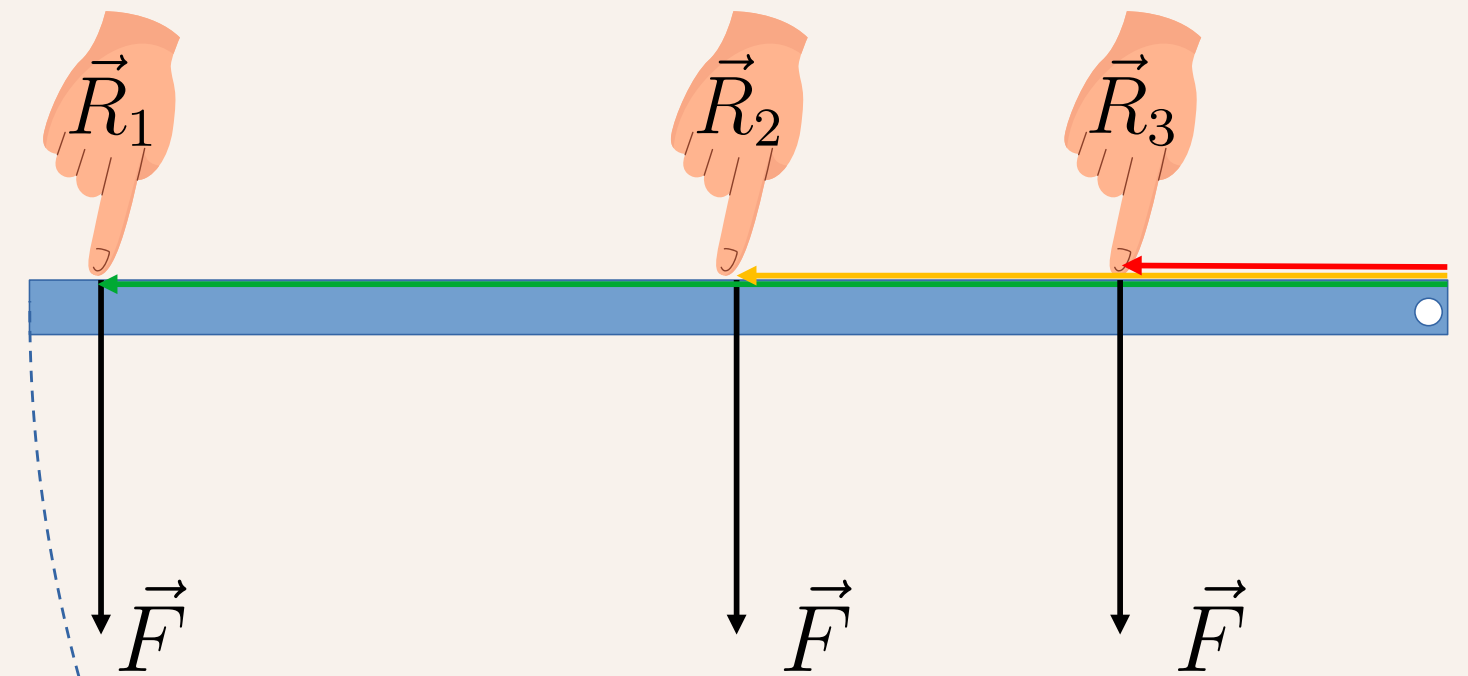
Torque

Es una medida de la tendencia de una fuerza a hacer girar un objeto

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}$$

$$\|\vec{\tau}\| = \|\vec{R}\| \|\vec{F}\| \sin(\alpha)$$

Cuesta menos abrir una puerta al aplicar una misma fuerza, con el mismo ángulo, cuanto más lejos del eje de giro



Ejemplo: Puerta giratoria

Situación inicial

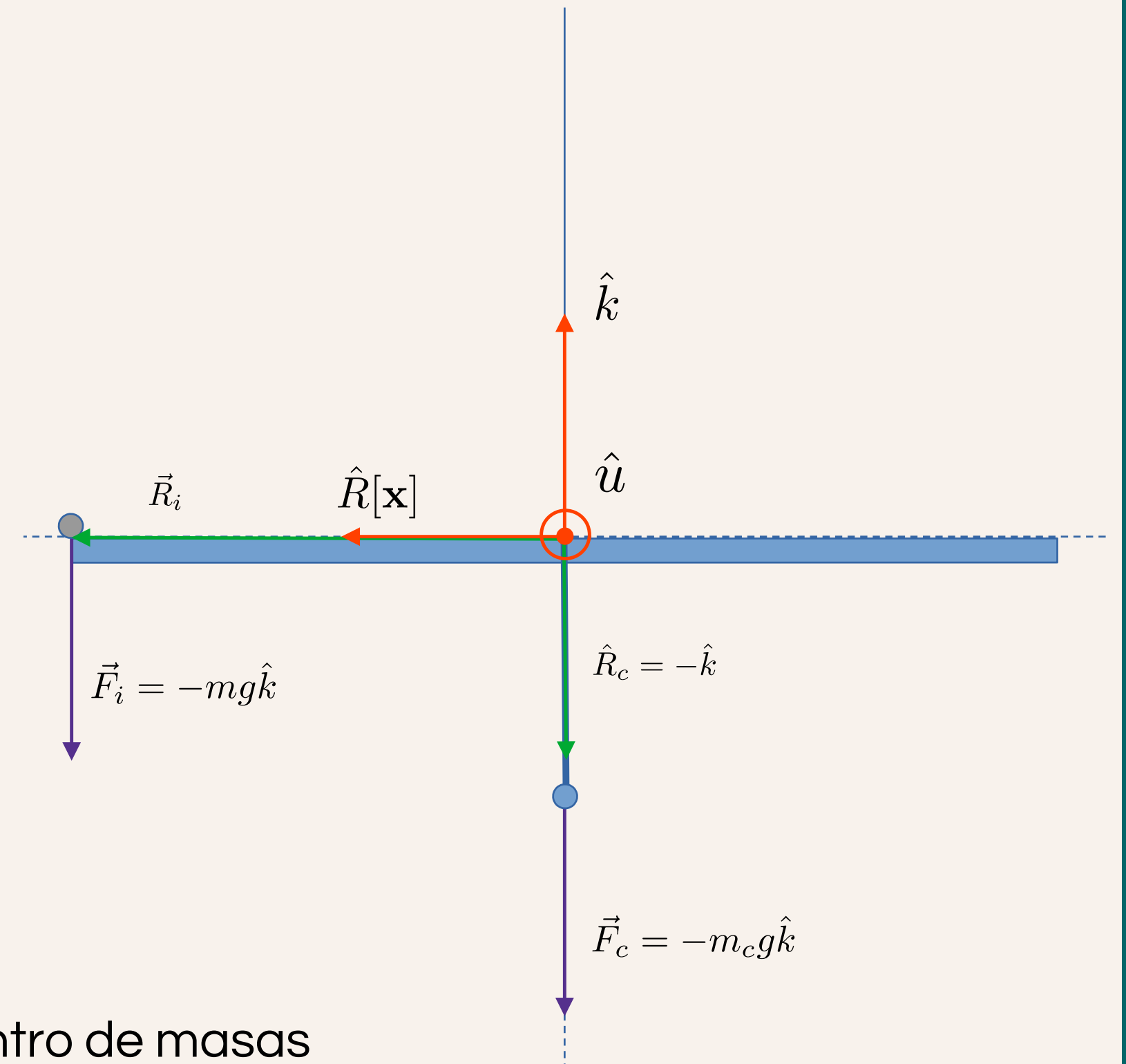
Todos los elementos son simétricos: disco y contrapeso

La asimetría la introduce la distribución de bolas

La balanza se desequilibra según la dirección del centro de masas de la distribución de bolas:

$$\vec{R}_{CM}[\mathbf{x}] = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{R}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{m \sum_{i=1}^N R_d \hat{R}_i}{mN} = \frac{R_d}{N} \vec{R}[\mathbf{x}] = \frac{R_d}{N} \left\| \vec{R}[\mathbf{x}] \right\| \hat{R}[\mathbf{x}]$$

El eje de giro es perpendicular a la vertical y al vector centro de masas



Corte transversal

Identificación de los torques

En la balanza musical intervienen dos tipos de torque

Bolas: $\vec{\tau}_i^* = \vec{R}_i^* \times \vec{F}_i = -(mgR_d)\hat{R}_i^* \times \hat{k}$

$$\vec{R}_i^* = R_d \hat{R}_i^*$$

Radio del disco

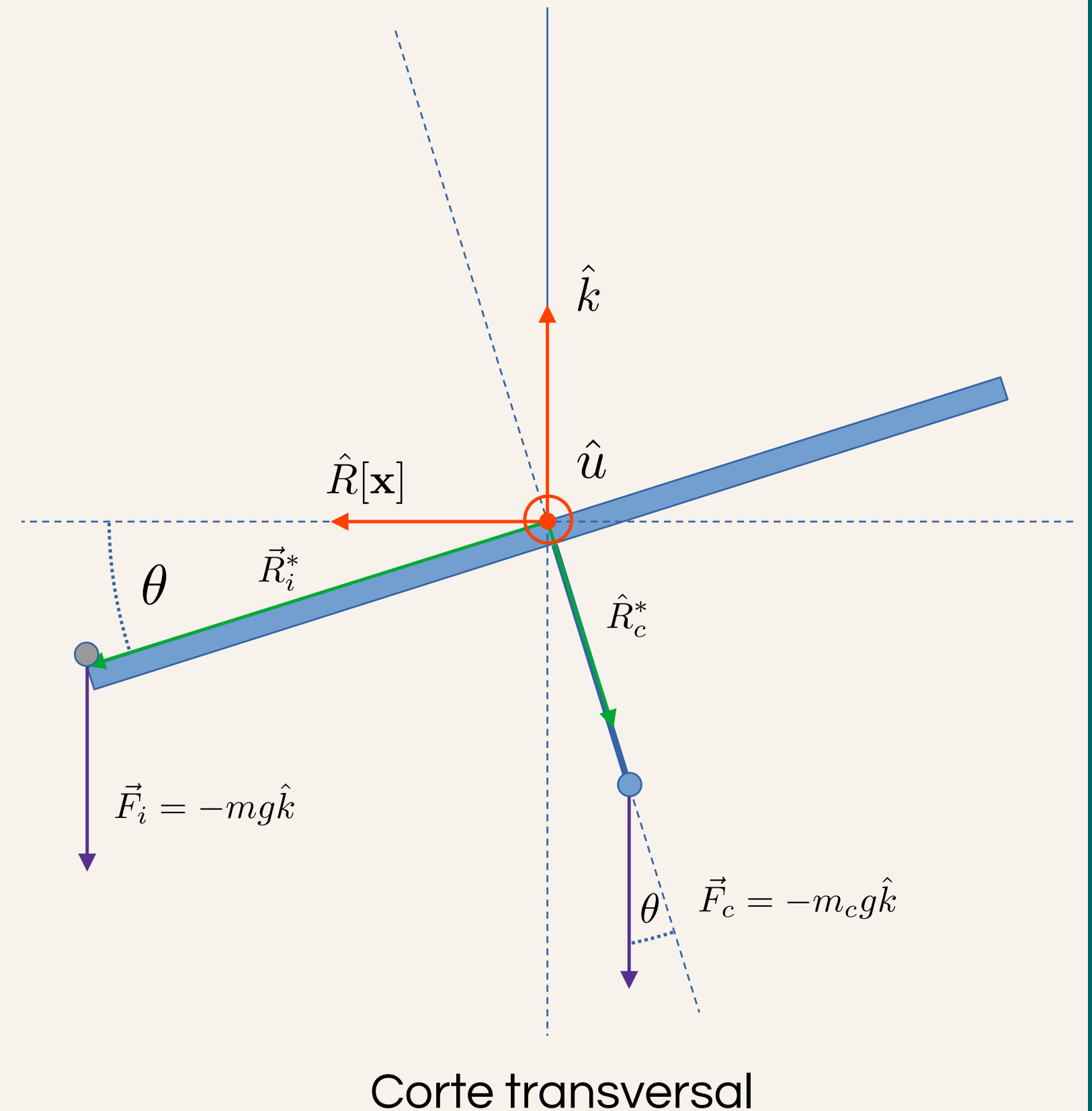
$$\vec{F}_i = -mg\hat{k}$$

Masa de la bola

Contrapeso: $\vec{\tau}_c^* = \vec{R}_c^* \times \vec{F}_c = -(m_c g R_c) \hat{R}_c^* \times \hat{k}$

$$\vec{F}_c = -m_c g \hat{k}$$

Masa del contrapeso



Situación de equilibrio

En equilibrio los torques se compensan:

$$\sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i^* + \vec{\tau}_c^* = \vec{0}$$

Expresión de los torques

La idea es aplicar una rotación a los vectores iniciales para obtener los de equilibrio $R_{\hat{u}}(\theta)$

Bolas:

$$\sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i^* = -(mgR_d) \left(\sum_{i=1}^N \hat{R}_i^* \right) \times \hat{k} = -(mgR_d) \left(R_{\hat{u}}(\theta) \vec{R}[\mathbf{x}] \right) \times \hat{k} = \left(mgR_d \left\| \vec{R}[\mathbf{x}] \right\| \right) \cos(\theta) \hat{u}$$

$$\sum_{i=1}^N \hat{R}_i^* = \sum_{i=1}^N R_{\hat{u}}(\theta) \hat{R}_i \stackrel{?}{=} R_{\hat{u}}(\theta) \sum_{i=1}^N \hat{R}_i = R_{\hat{u}}(\theta) \vec{R}[\mathbf{x}]$$

“Operador” de rotación: incluye productos escalares y vectoriales $\rightarrow$ Distributivos respecto a la suma

Contrapeso:

$$\vec{\tau}_c^* = \vec{R}_c^* \times \vec{F}_c = -(m_c g R_c) \hat{R}_c^* \times \hat{k} = -(m_c g R_c) \left(R_{\hat{u}}(\theta) (-\hat{k}) \right) \times \hat{k} = -m_c g R_c \sin(\theta) \hat{u}$$



Ángulo de equilibrio

Igualando ambas expresiones: $\left(mgR_d \left\| \vec{R}[\mathbf{x}] \right\| \right) \cos(\theta) \hat{u} - m_c g R_c \sin(\theta) \hat{u} = \vec{0}$

Podemos despejar el ángulo ya que la suma total de torques se encuentra en la misma dirección.

$$\theta = \arctan \left(\frac{R_d}{R_c} \frac{m}{m_c} \left\| \vec{R}[\mathbf{x}] \right\| \right)$$

La dependencia con la distribución de las bolas viene de sus ángulos relativos sobre la balanza:

$$\left\| \vec{R}[\mathbf{x}] \right\| = (\vec{R}[\mathbf{x}] \cdot \vec{R}[\mathbf{x}])^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^N \hat{R}_i \cdot \hat{R}_j \right)^{\frac{1}{2}} = \left(N + 2 \sum_{i < j}^N \cos(\alpha_{ij}) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Fijados los parámetros de la balanza, el ángulo de equilibrio depende solamente de la distribución de bolas $\rightarrow$ del conjunto de notas

Conjuntos complementarios

Las posiciones de las notas de un conjunto corresponden a las posiciones desocupadas de su complementario

Posiciones:

$x = (0, 2, 4, 5, 7, 9, 11)$

$y = (1, 3, 6, 8, 10)$

Unión $(x, y) = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$

Intersección $(x, y) = ()$

Cadenas de bits:

$s = 101011010101$

$t = 010100101010$

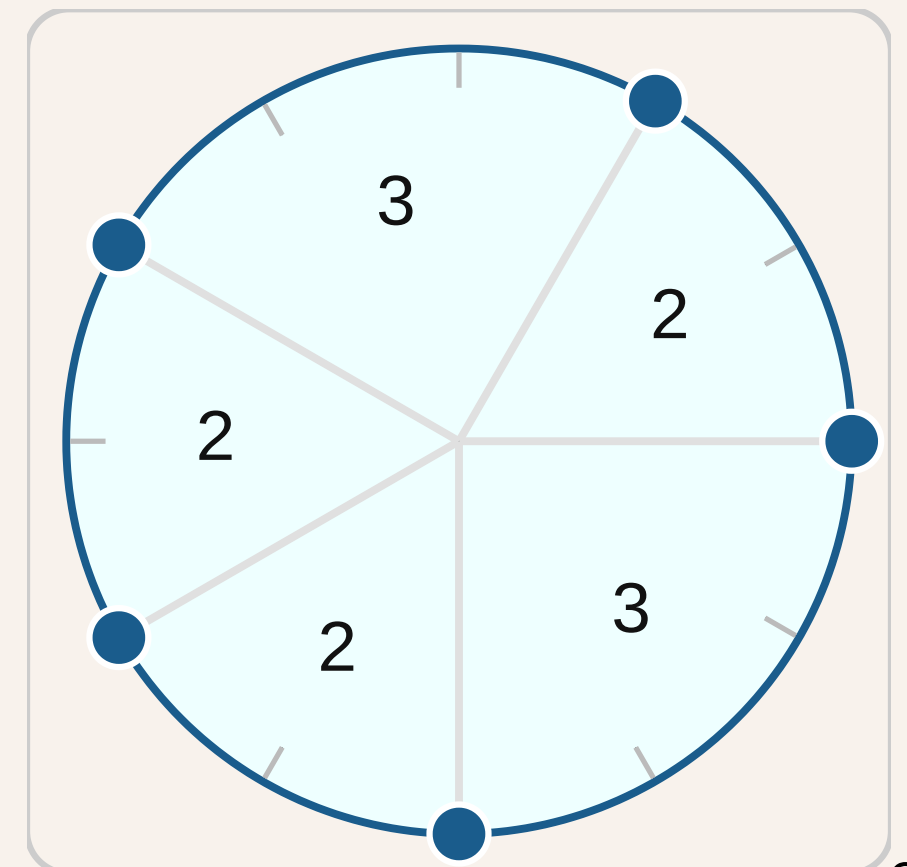
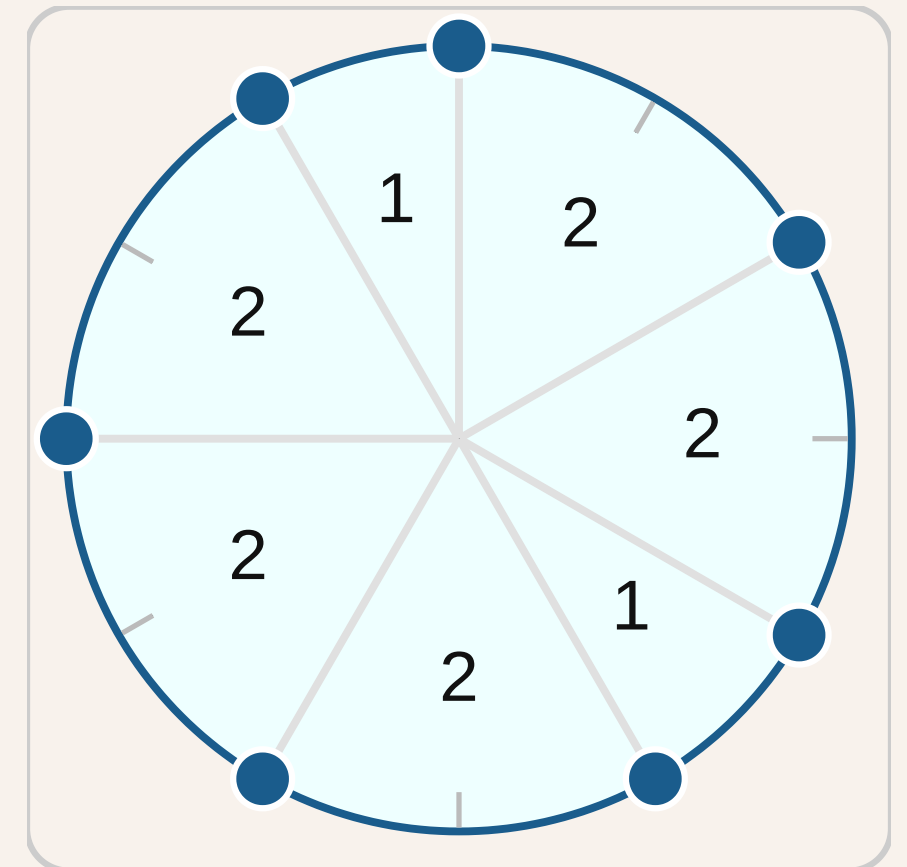
Or $(s, t) = 111111111111$

And $(s, t) = 000000000000$

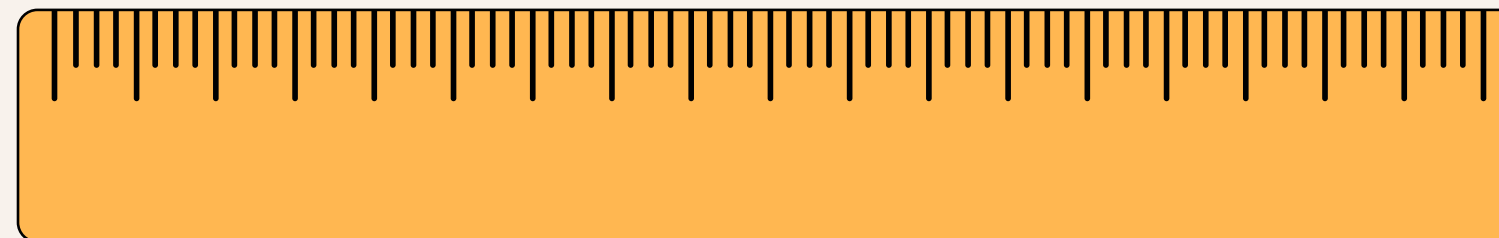
Tienen idéntico ángulo de equilibrio:

$$\theta[\mathbf{x}] = \theta[\overline{\mathbf{x}}]$$

Demostración

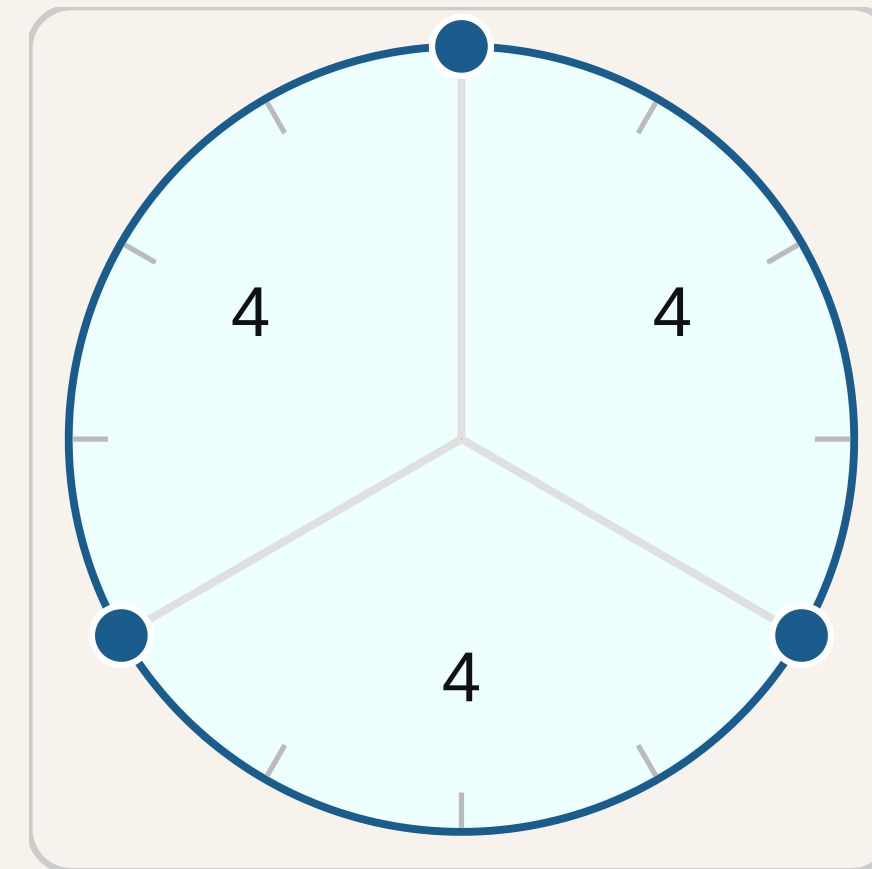
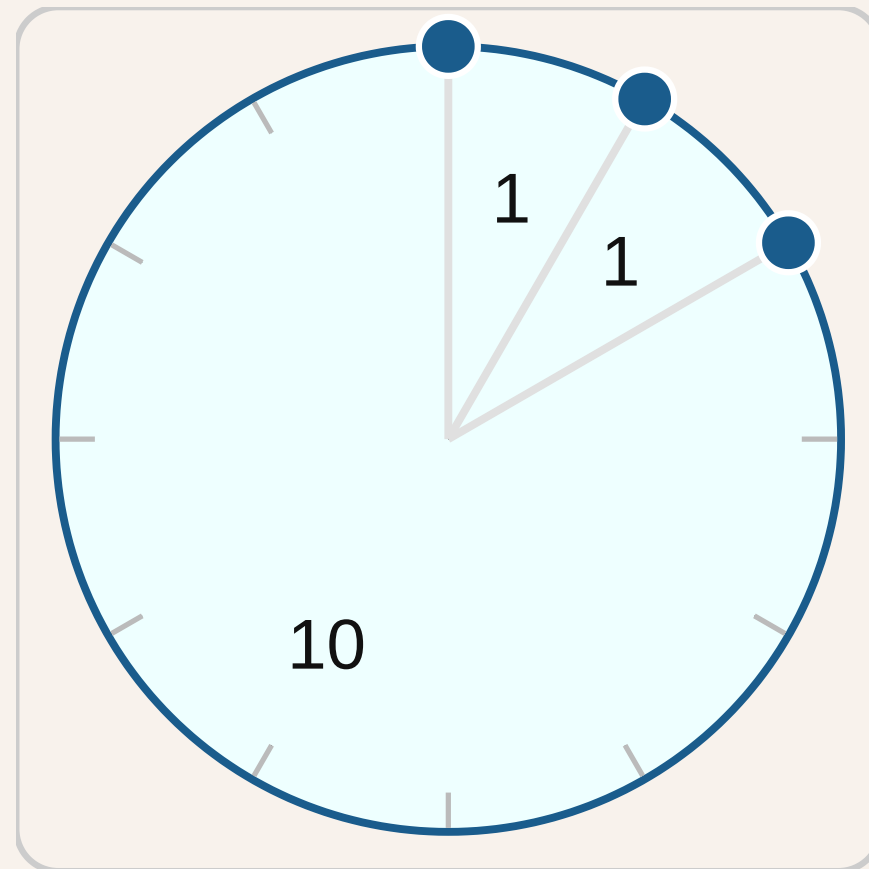


Medida del reparto



Reparto de un conjunto de notas

Dos conjuntos de notas con repartos mínimo y máximo:



¿Cómo cuantificar o medir el grado de reparto?

Idea detrás de la medida del reparto

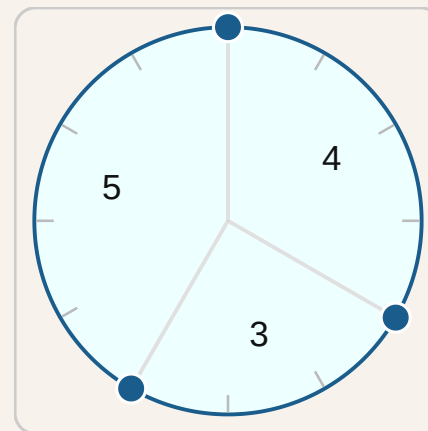
Polígono regular inscrito en el disco $\rightarrow$ Máximo reparto



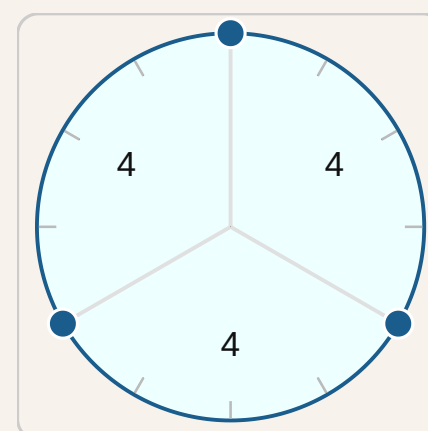
Medida del reparto:

“Distancia en semitonos entre un conjunto de notas y el polígono regular correspondiente”

Ejemplo:



Tríada mayor



Tríada aumentada (patrón)

Distancia de 1 semitono

Distancia entre dos conjuntos de N notas

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{k=0, \dots, N-1} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; k)$$

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; k) = \sum_{i=0}^{N-1} d_{\text{circ}}(x_i, y_{[i+k]_N})$$

Distancia circular:

$$d_{\text{circ}}(x_i, y_j) = \min(|x_i - y_j|, B - |x_i - y_j|)$$

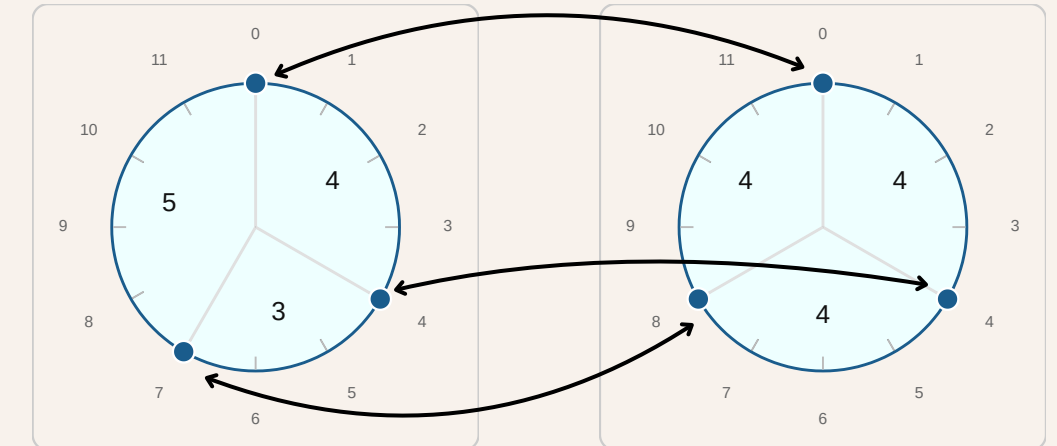
$$d_{\text{circ}}(0, 7) = \min(|-7|, 12 - |-7|) = \min(7, 5) = 5$$

$$0 \rightarrow 0$$

$$4 \rightarrow 4$$

$$7 \rightarrow 8$$

$$S = 1$$

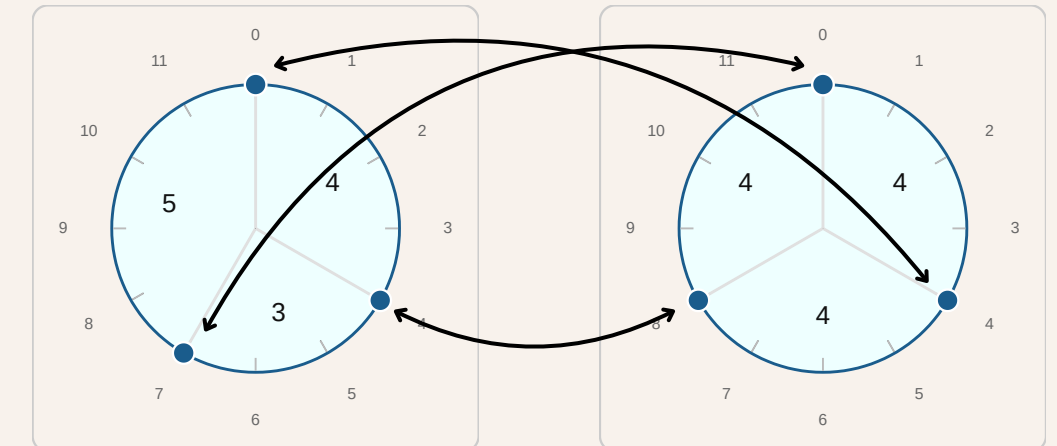


$$0 \rightarrow 4$$

$$4 \rightarrow 8$$

$$7 \rightarrow 0$$

$$S = 13$$

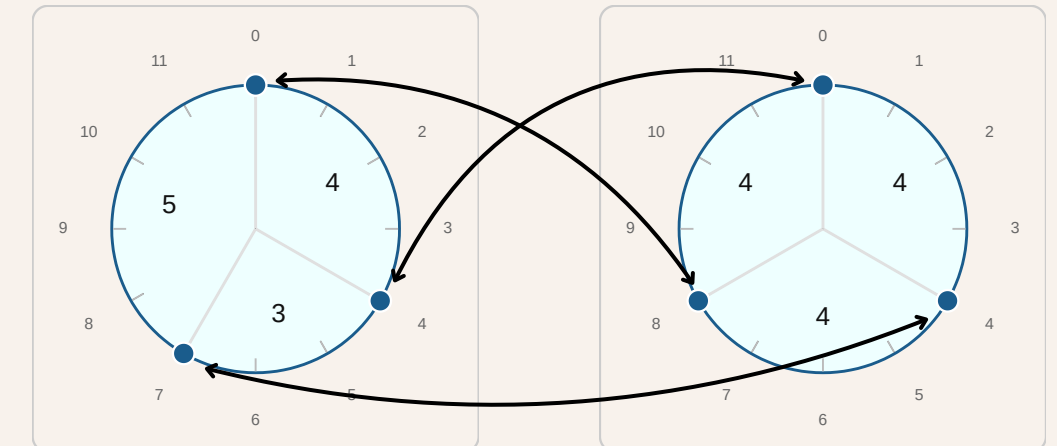


$$0 \rightarrow 8$$

$$4 \rightarrow 0$$

$$7 \rightarrow 4$$

$$S = 11$$



Medida del reparto

La medida del reparto debe ser intrínseca al conjunto de notas $X \rightarrow$ Tomamos la mínima distancia del polígono regular P a cualquier transposición de X

$$\rho(\mathbf{x}) = \min_{j=0, \dots, B-1} d(\mathbf{p}, R_j(\mathbf{x}))$$

$\mathbf{p}$ $\rightarrow$ Posiciones del polígono regular

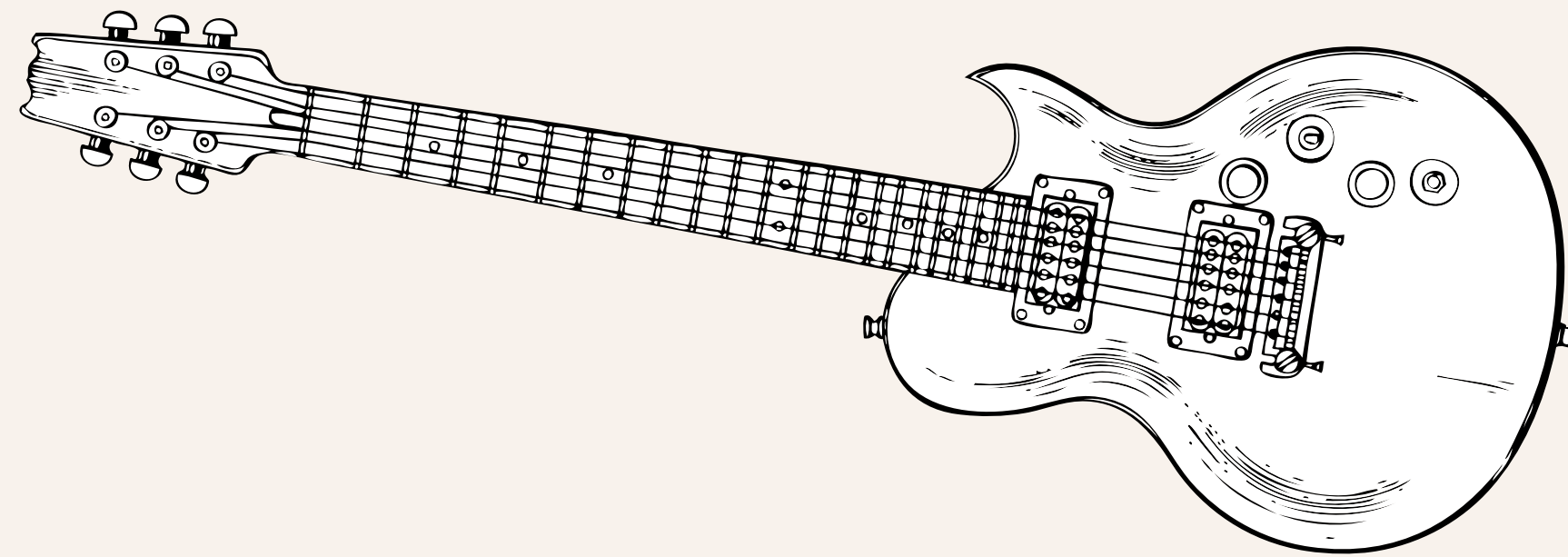
p_i $\rightarrow$ Una posición puede ser fraccionaria

$R_j(\mathbf{x})$ $\rightarrow$ Rotación de J -posiciones del conjunto X

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{k=0, \dots, N-1} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; k)$$

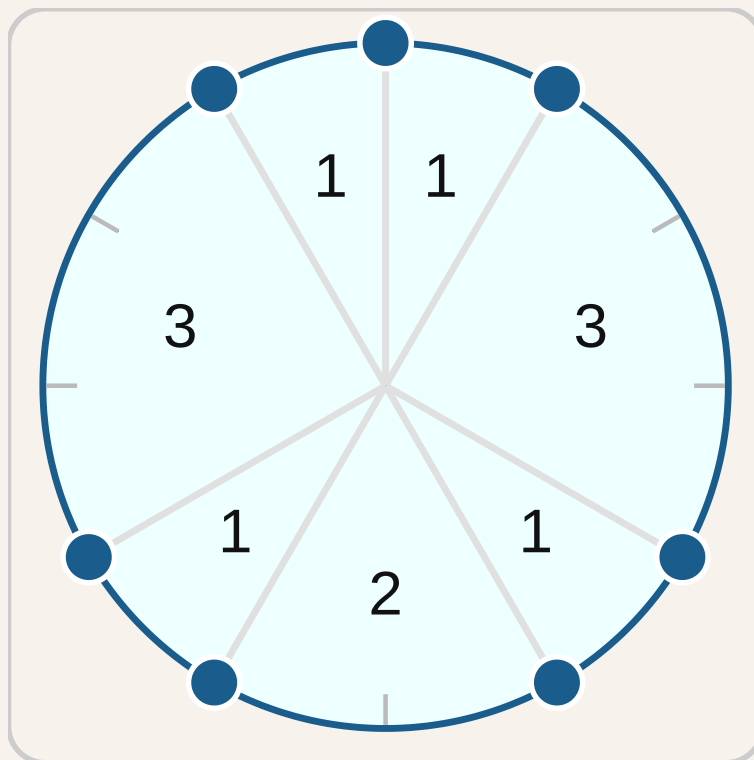
$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; k) = \sum_{i=0}^{N-1} d_{\text{circ}}(x_i, y_{[i+k]_N})$$

Ejemplos prácticos

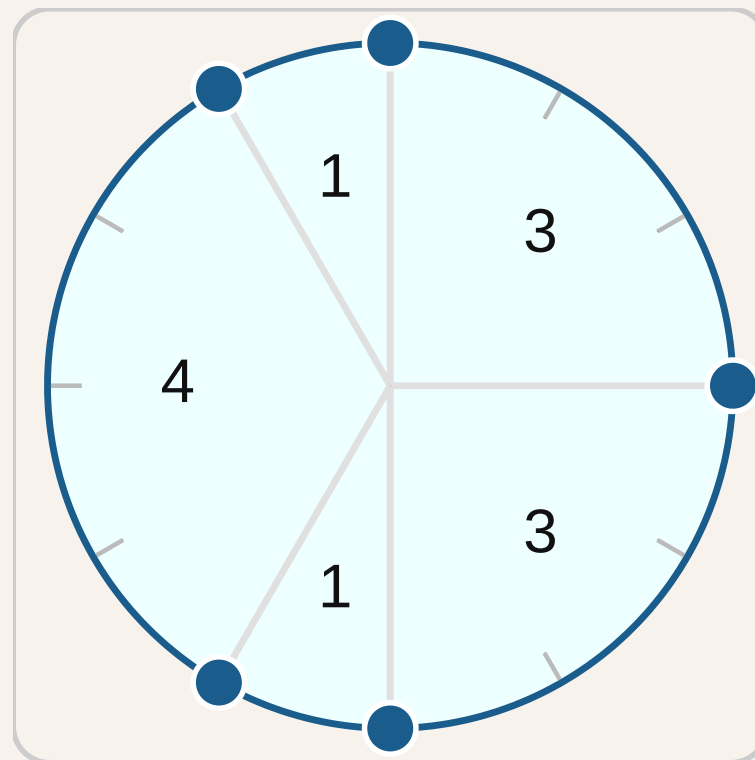


Ejemplos de máximo equilibrio y reparto

Máximo equilibrio



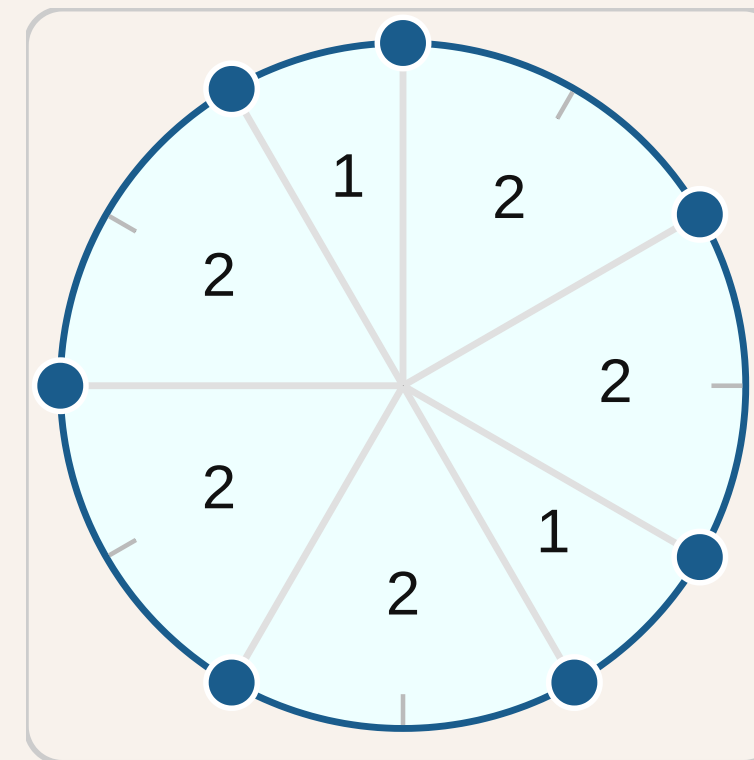
India



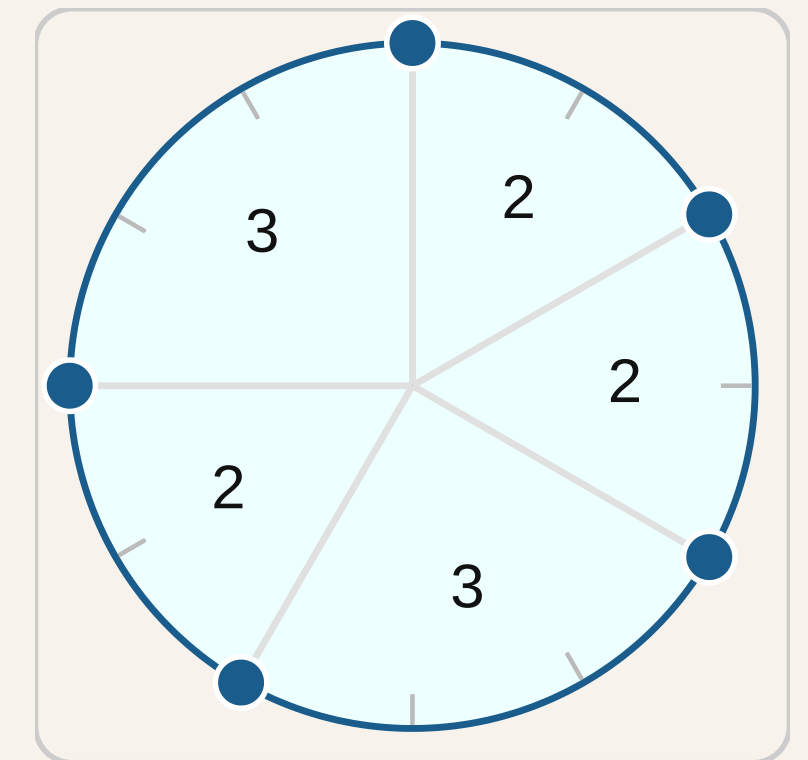
Oriental

Complementarias

Máximo reparto



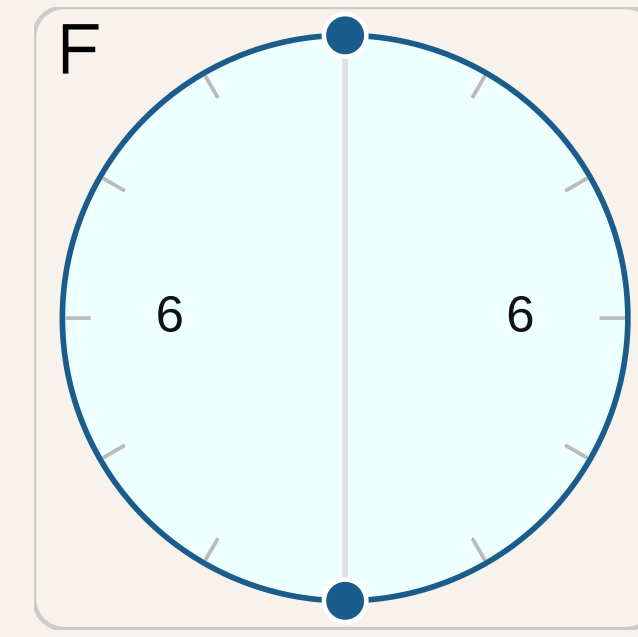
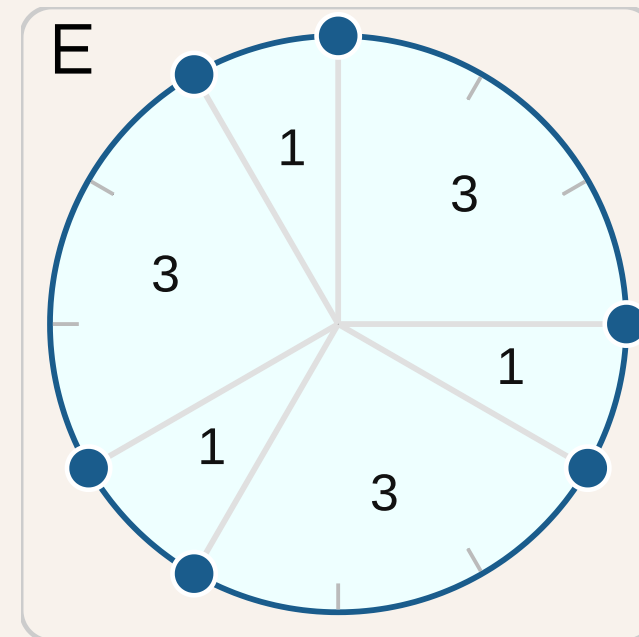
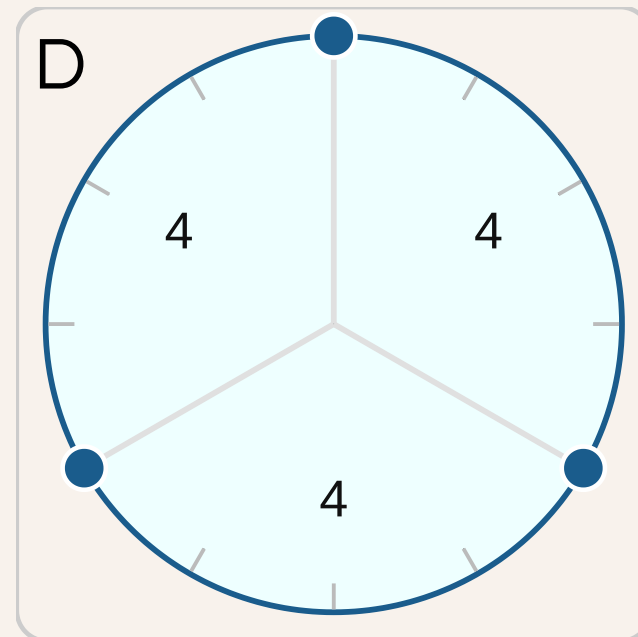
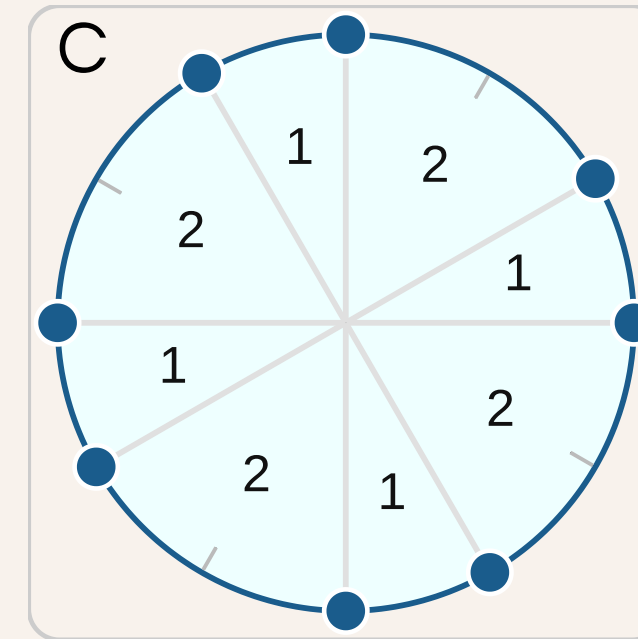
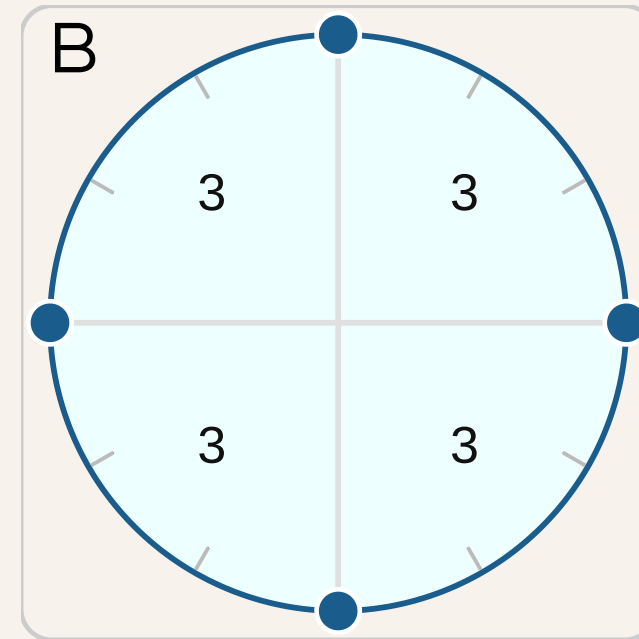
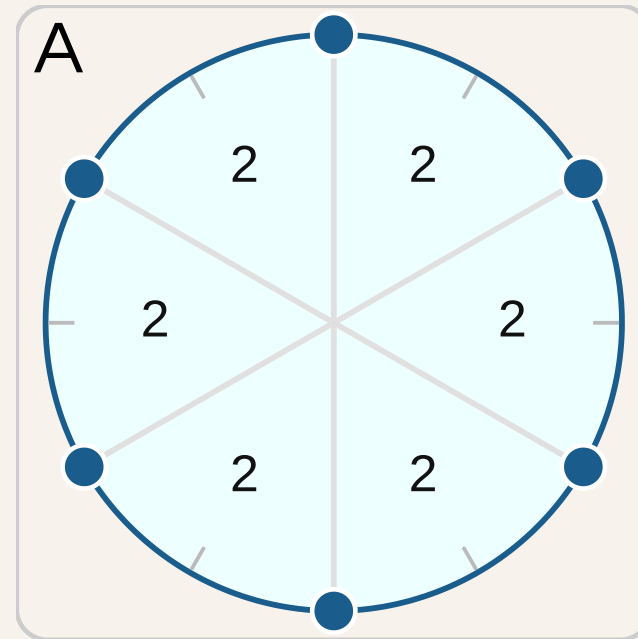
Mayor



Pentatónica Mayor

Complementarias

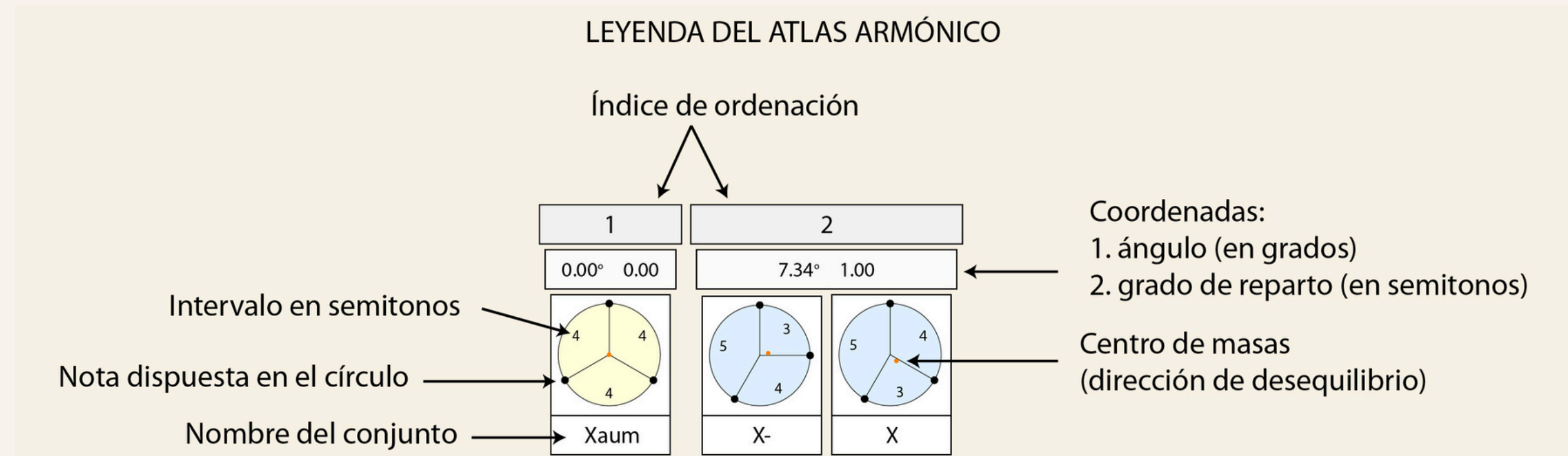
Ejemplos de máximo equilibrio





El Atlas Armónico

El Atlas Armónico contiene todas las posibles escalas musicales desde una sola nota hasta la escala cromática (12 notas).

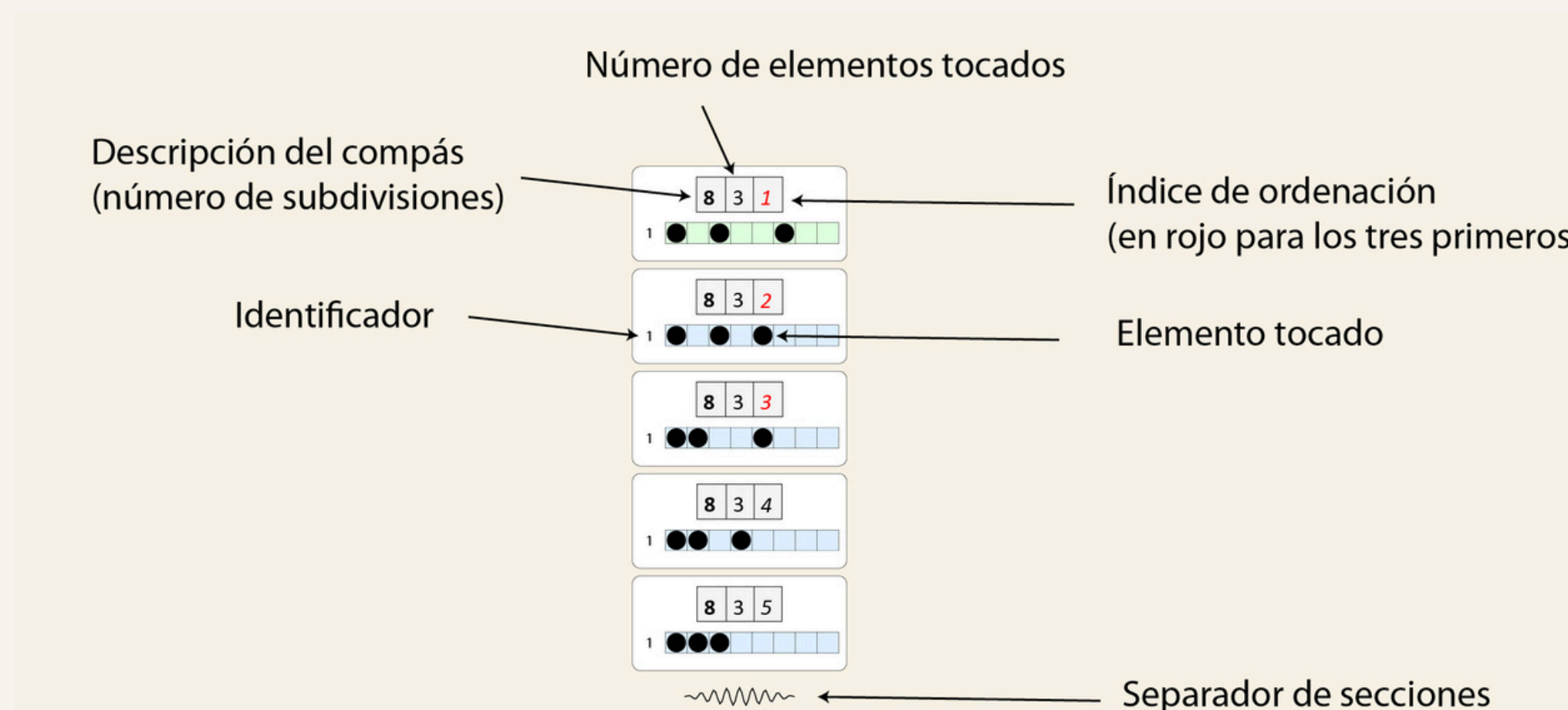


El Atlas Armónico y la CAU utilizan la misma representación circular de las notas. Por eso la CAU es el complemento ideal del Atlas Armónico.

El Atlas Rítmico

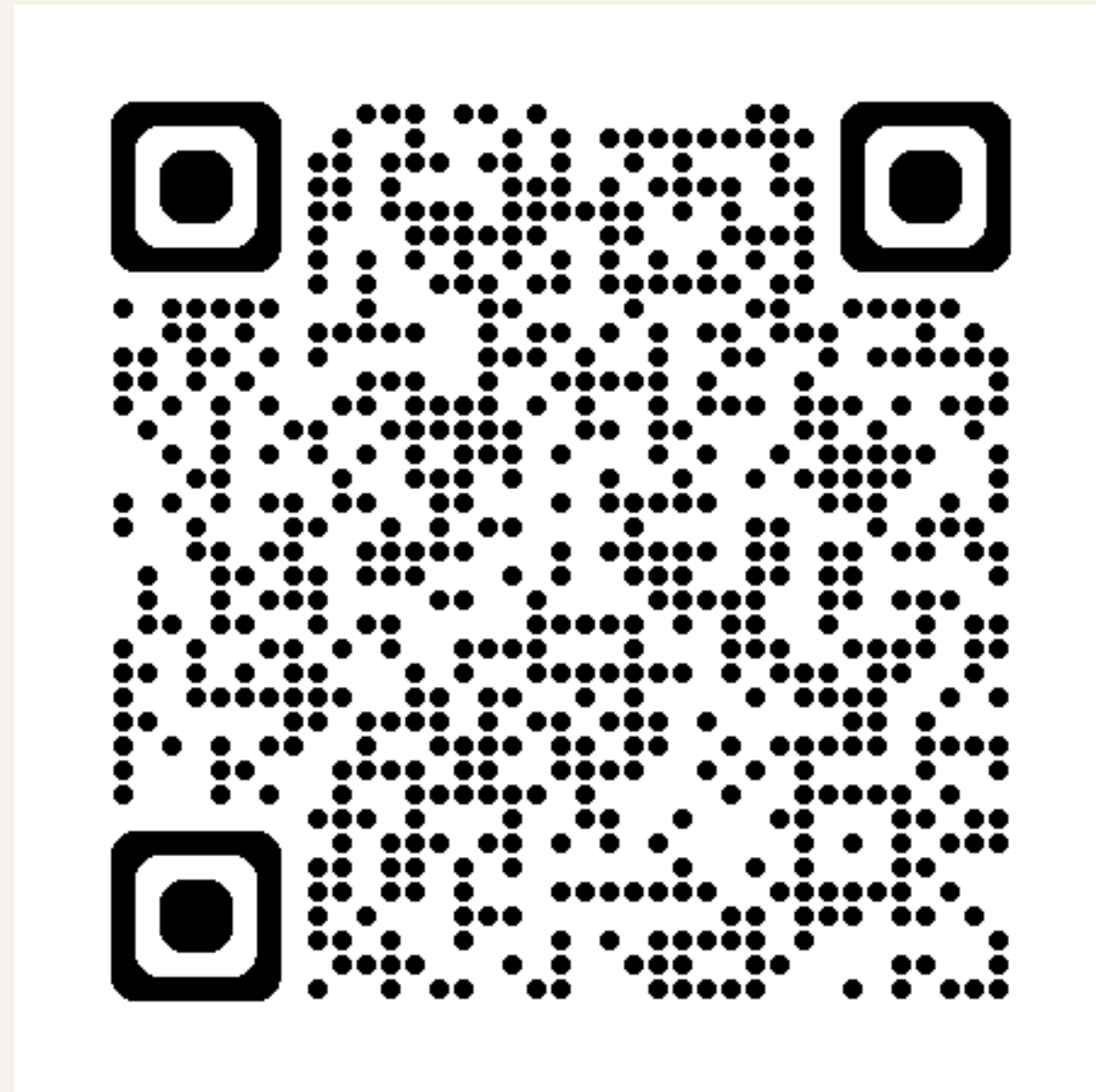
El Atlas Rítmico recoge todos los ritmos desde un compás de dos subdivisiones hasta doce subdivisiones. Los compases desde trece hasta dieciséis limitan a 80 ritmos por sección.

Leyenda del Atlas Rítmico

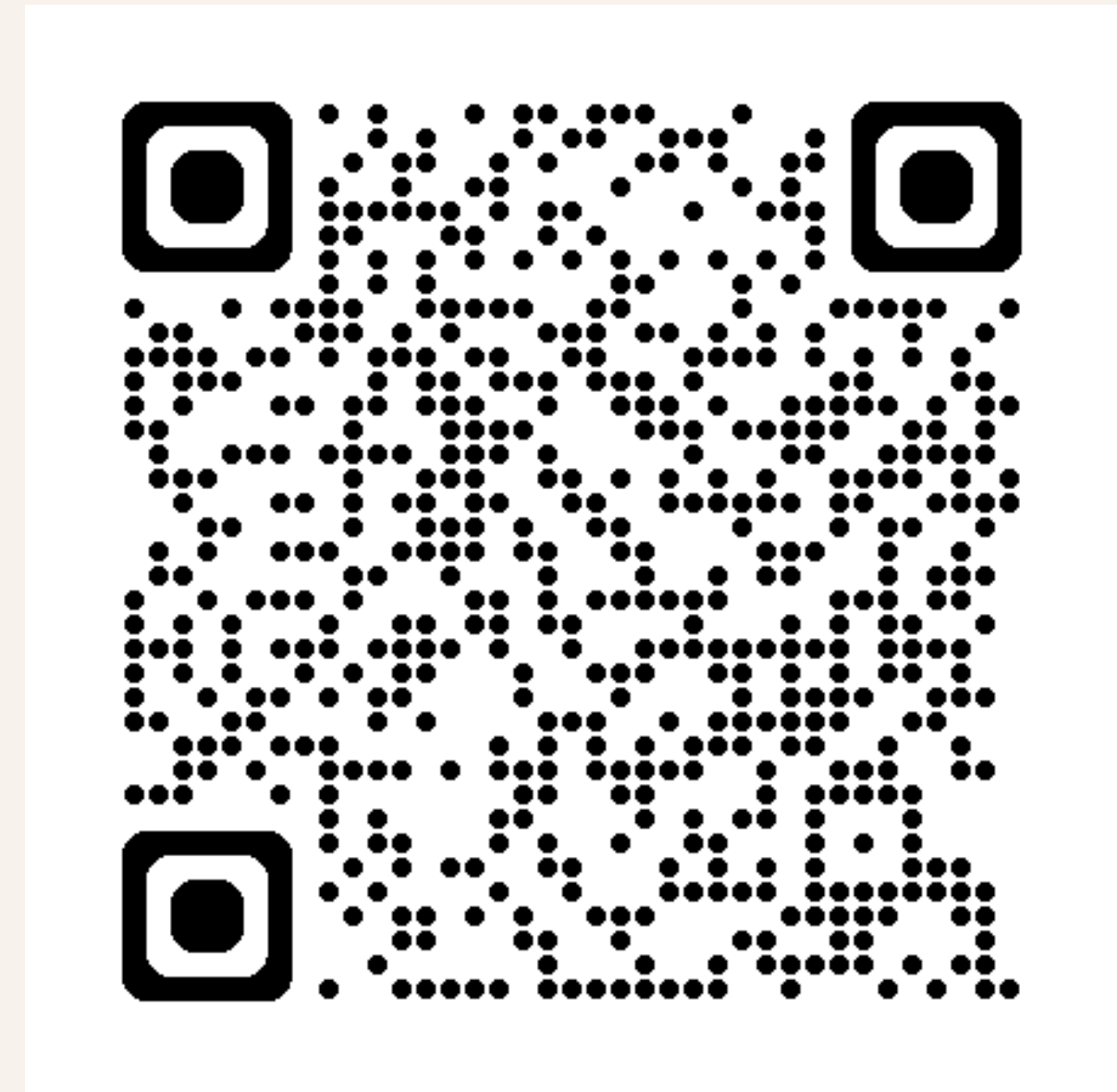


El Atlas Rítmico y el TDR utilizan la misma representación horizontal de las notas. Por eso el TDR es el complemento ideal del Atlas Rítmico.

Atlas Rítmico



Atlas Armónico



Descárgalos

Herramientas musicales

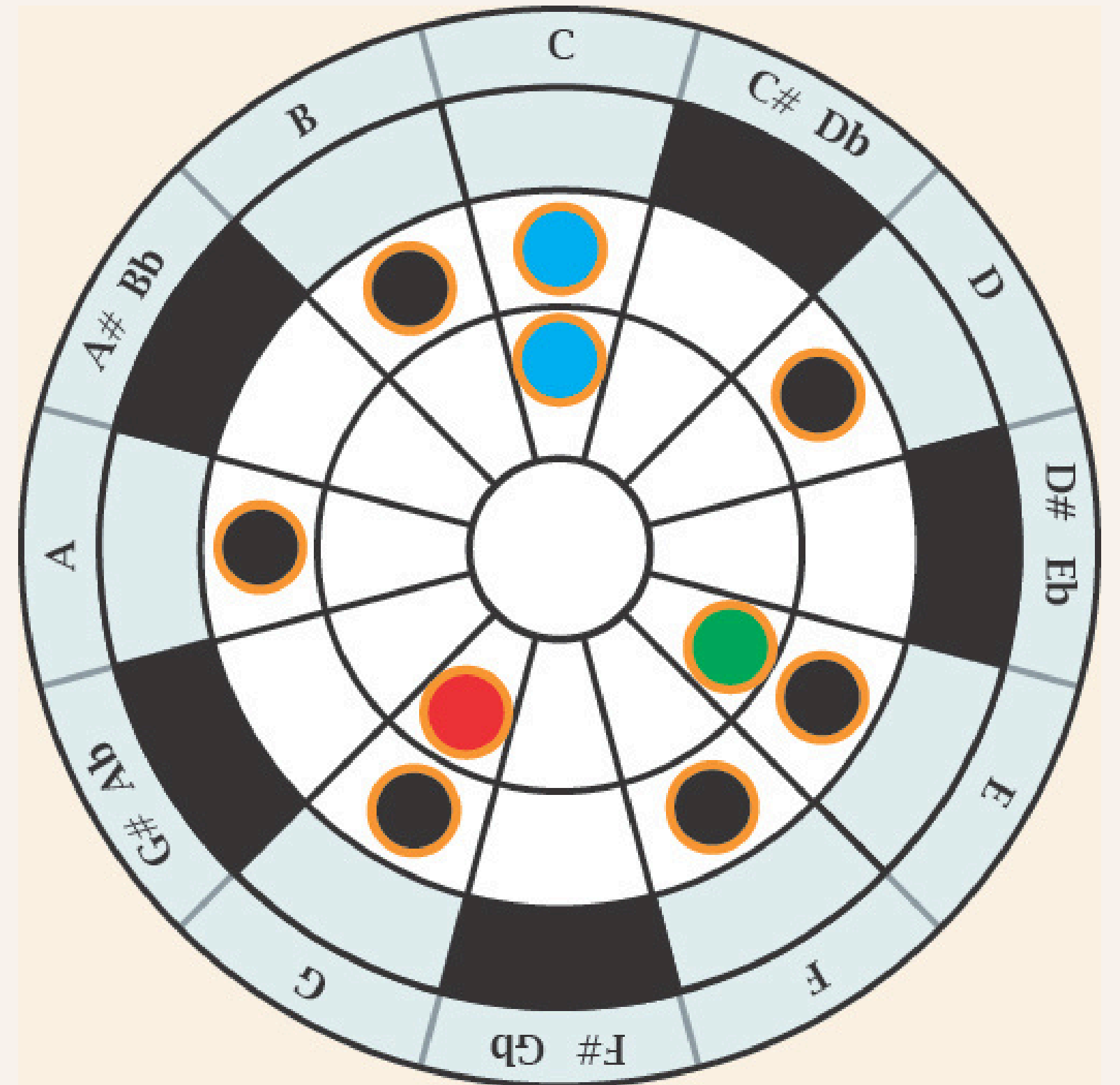


La Calculadora Armónica Universal (CAU)

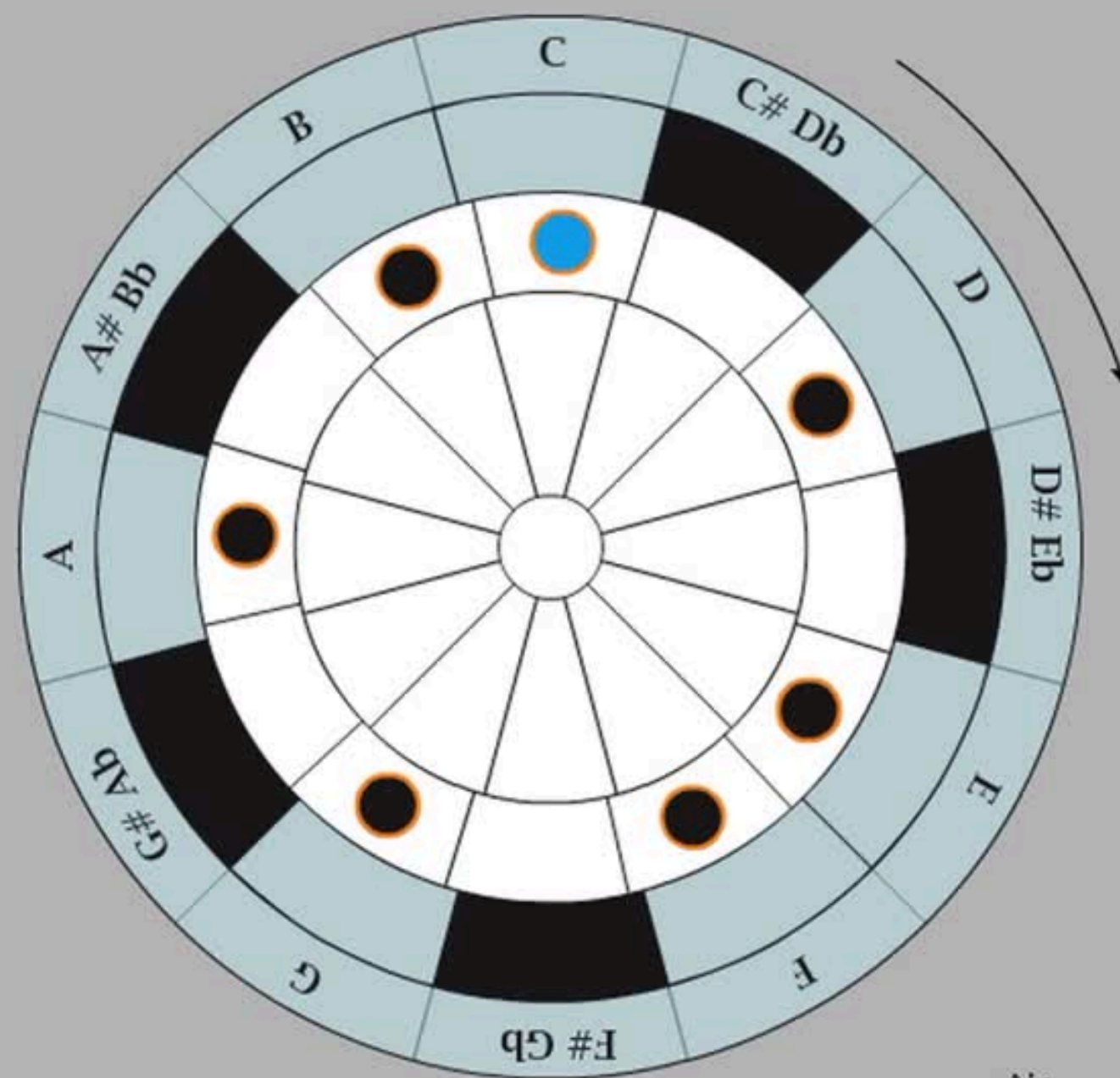
La CAU es una herramienta de mesa para el estudio de las proporciones armónicas.

La CAU complementa de modo práctico el Atlas Armónico.

Vamos a ver dos videos

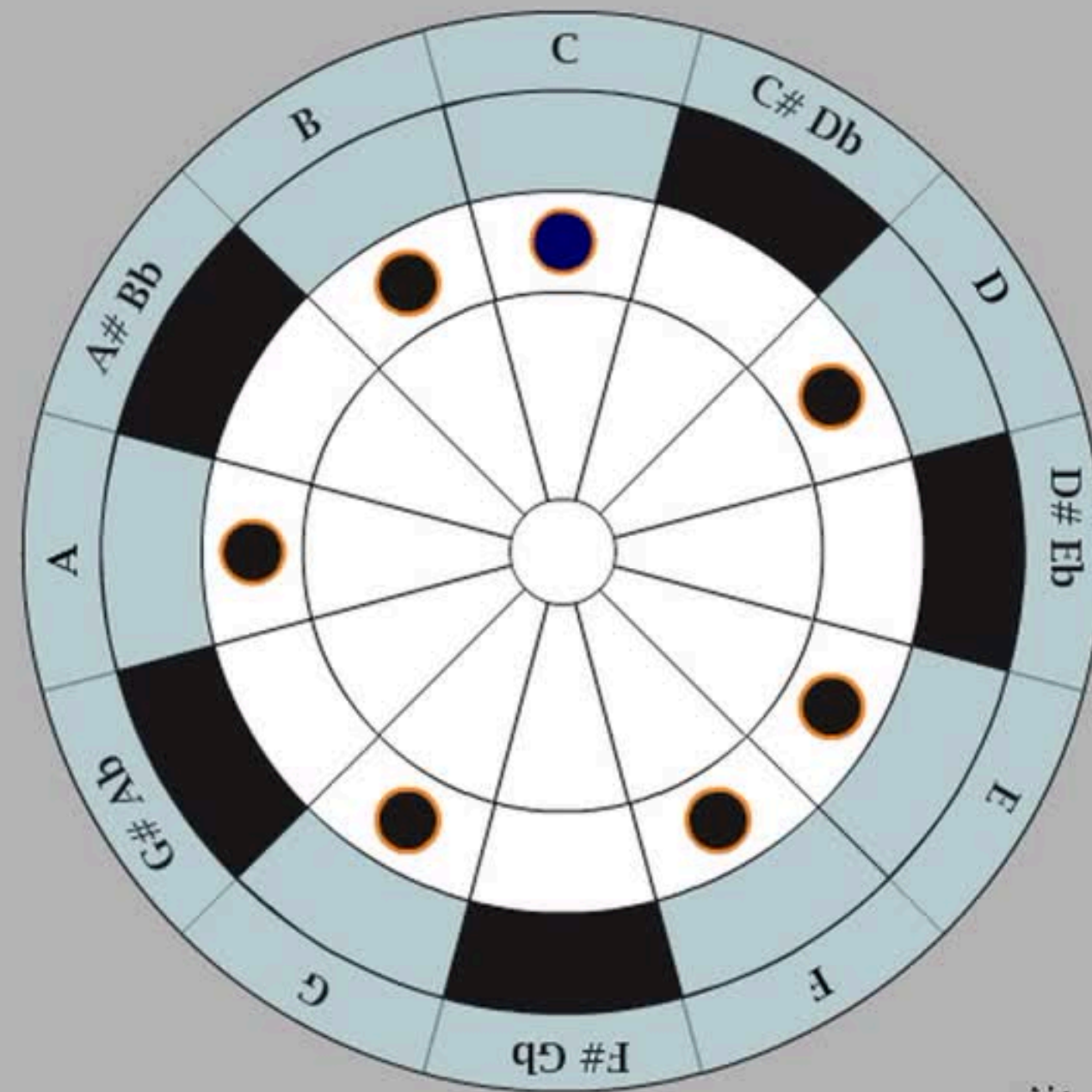


Escala de C mayor



CALCULADORA ARMÓNICA UNIVERSAL

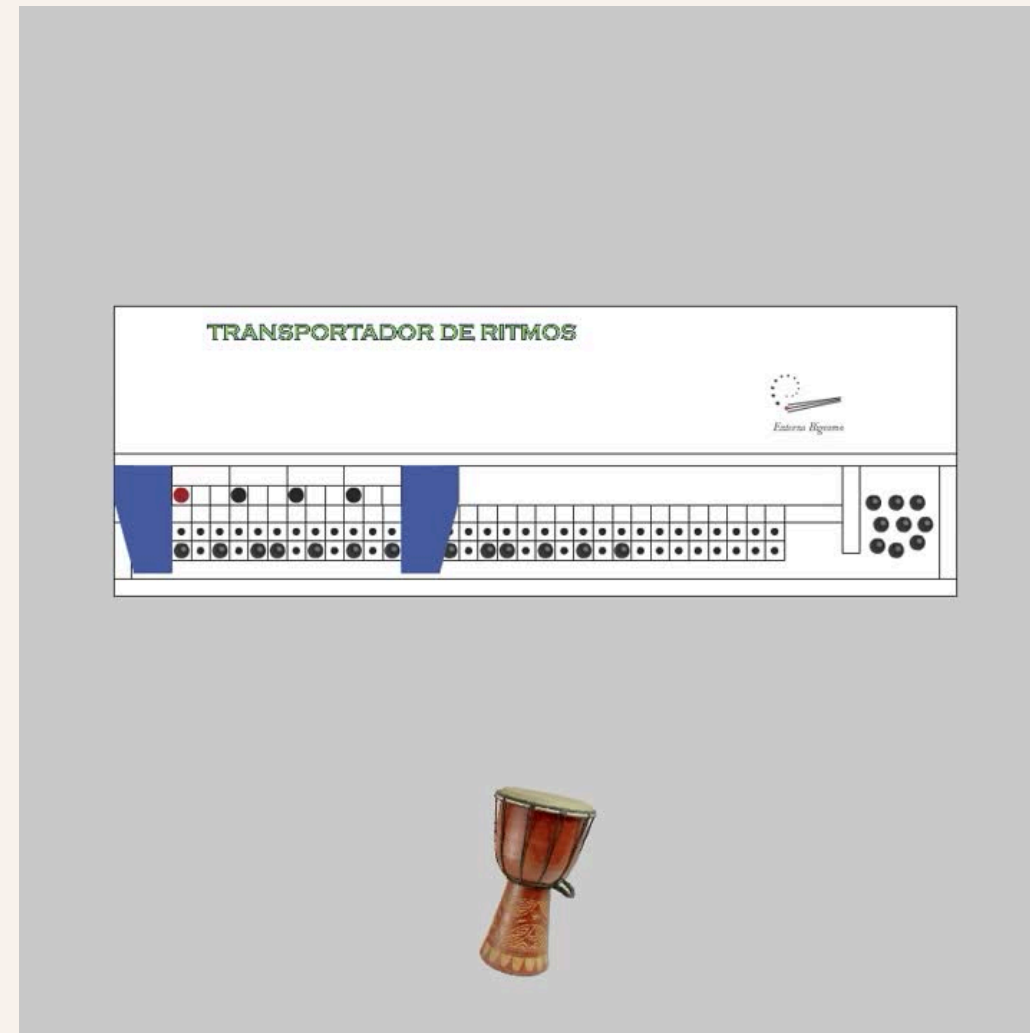




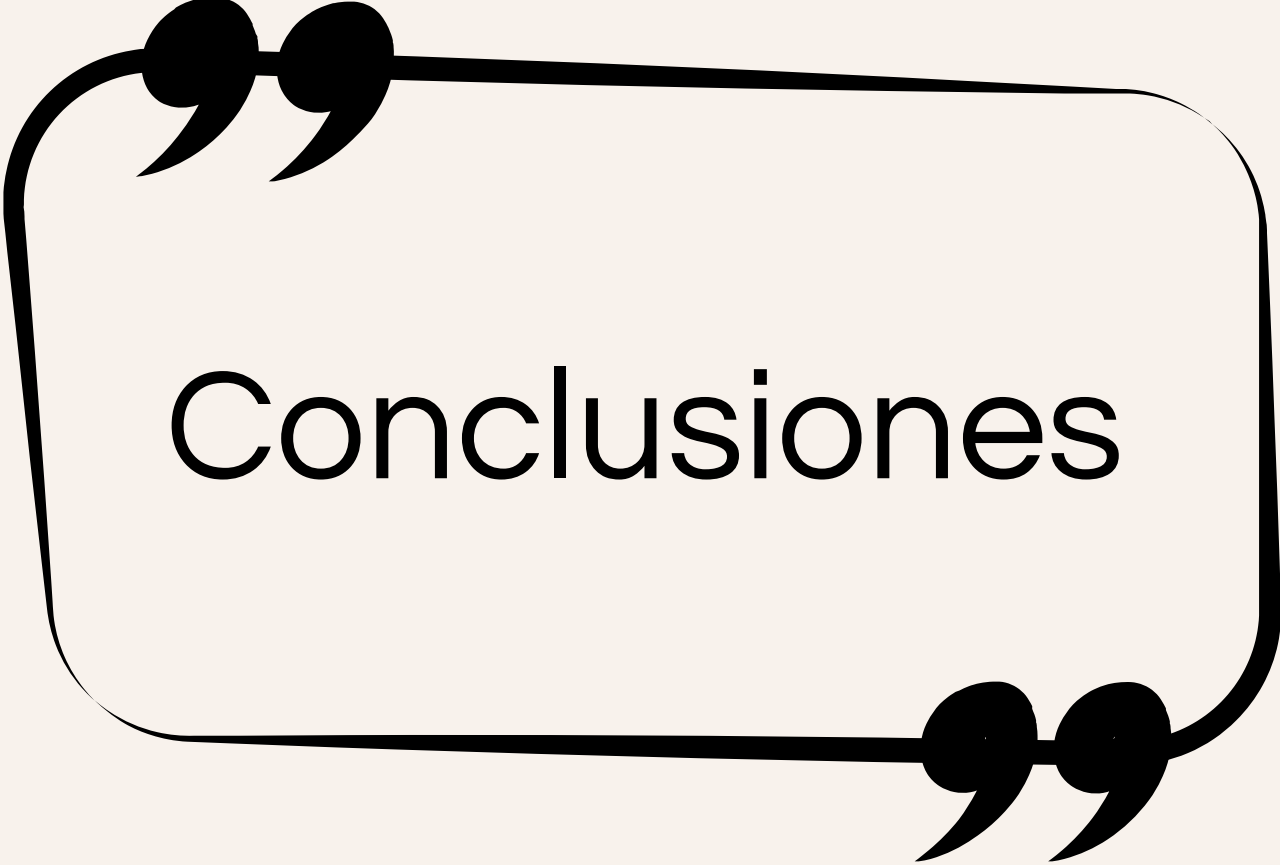
CALCULADORA ARMÓNICA UNIVERSAL



El Transportador de Ritmos (TDR)



El TDR sirve para desplazar un ritmo semilla de subdivisión en subdivisión. Vamos a ver un video.



Conclusiones

Conclusiones

- Hemos explorado una faceta de la música, utilizando modelos físico-matemáticos.
- Los atlas ofrecen una ordenación que parece estar en concordancia con el uso habitual de las escalas musicales en las culturas y la historia
- Quedan preguntas abiertas:
 - ¿Por qué el equilibrio y reparto parecen ser criterios de ordenación adecuados?
 - ¿Por qué no tienen el mismo equilibrio y reparto los conjuntos a partir de 4 notas?
 - ¿Existe una relación entre ambos criterios?
 - ¿Qué otros criterios de medida del reparto existen?
- Aunque hemos contado y clasificado conjuntos de notas y ritmos, su estudio efectivo para alguien dedicado a la música puede ser inagotable
- Las herramientas son una creación del “Entorno Bigrama” con licencia en código abierto para futuras colaboraciones.



Agradecimientos a:

ICMUV, Guillermo Muñoz, Alicia Merelo, CSMV, Jorge Torres, Pierre Therrien, Toni Belenguer, Naima Kientz Sánchez, Simone Zaniol, Andrés López Pérez, Esther Sánchez Pérez, Jonathan Knoles, Martin Carreto, Victor Bermudez, Catherine Kientz, Garry Jackson, Alisa de Trevi, Clotilde Herscu, Joan Muñoz.

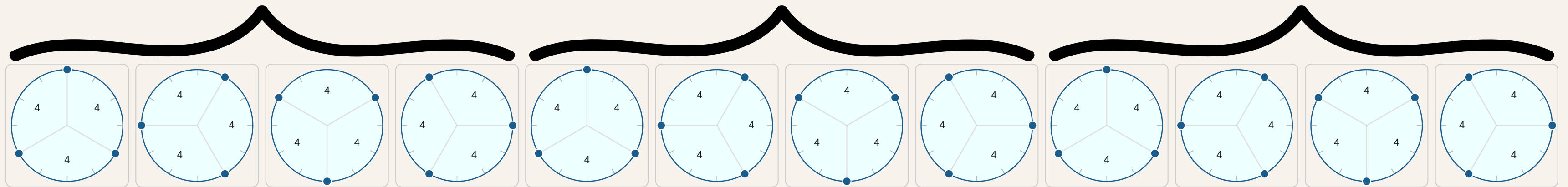
Dedicado a Pep Alcántara y Toni Belenguer

Anexos

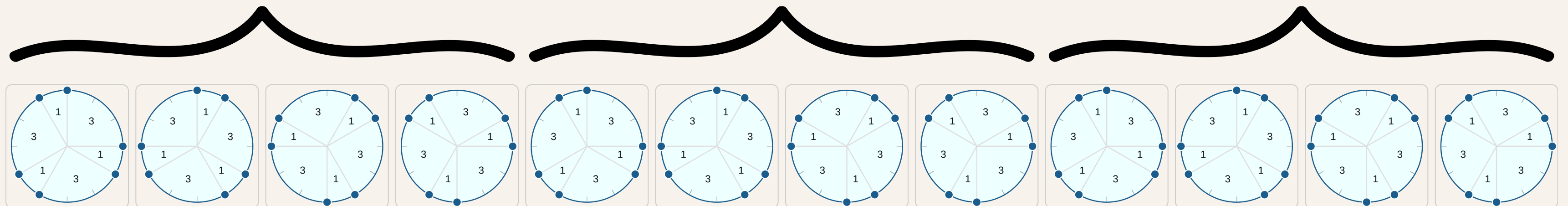


Conjuntos semilla

El número de transposiciones únicas de un conjunto semilla coincide con el periodo de su estructura interválica



Ejemplo: (4, 4, 4) → Periodo 4 semitonos



Ejemplo: (3, 1, 3, 1, 3, 1) → Periodo 3+1=4 semitonos

Rotación y suma de torques

Expresión general de la rotación:

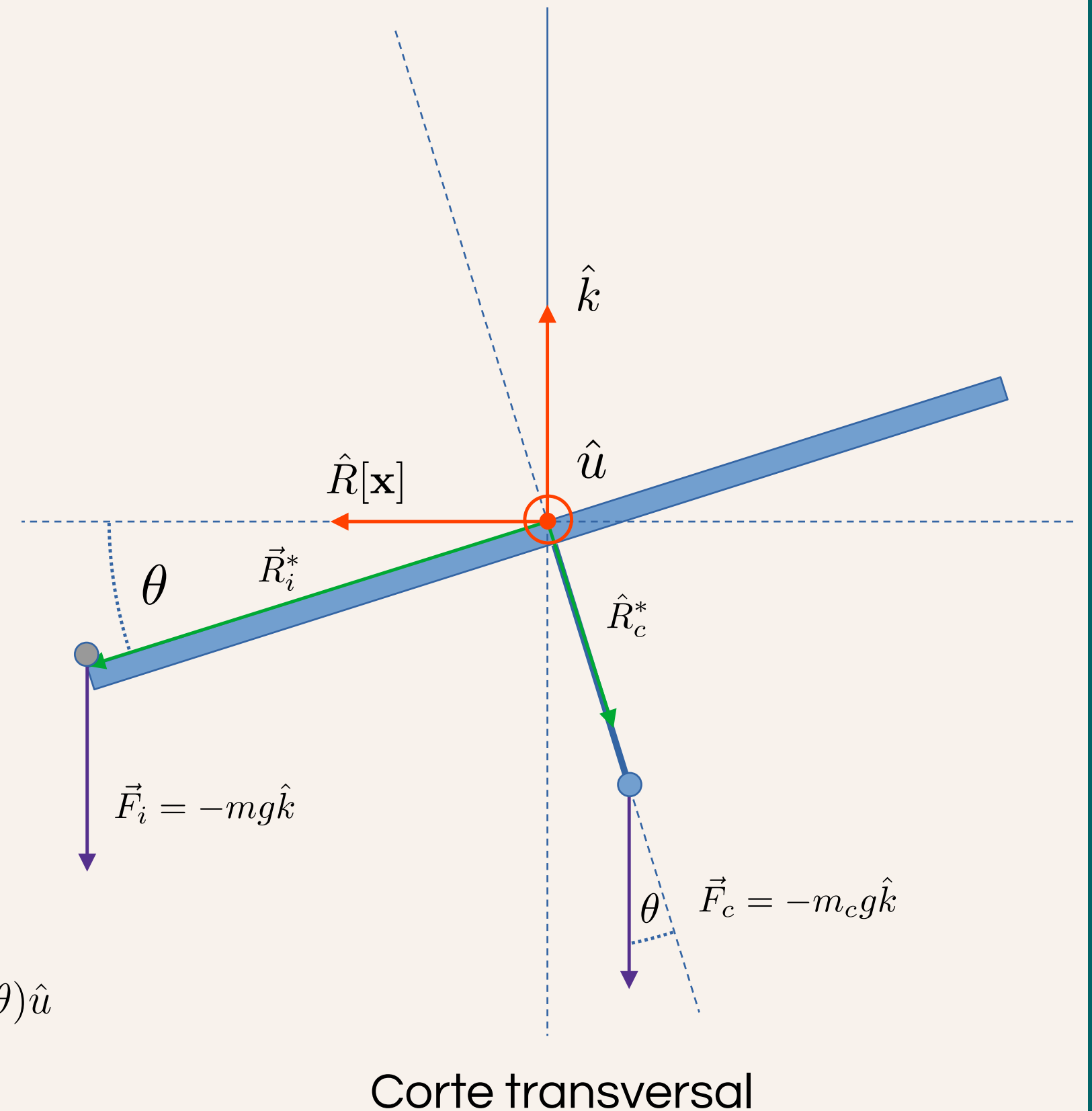
$$R_{\hat{u}}(\theta)\vec{v} = \hat{u}(\hat{u} \cdot \vec{v}) + \cos(\theta)(\hat{u} \times \vec{v}) \times \hat{u} + \sin(\theta)(\hat{u} \times \vec{v})$$

Aplicada a nuestro caso:

$$\begin{aligned} R_{\hat{u}}(\theta)\hat{R}[\mathbf{x}] &= \underbrace{(\hat{u} \cdot \hat{R}[\mathbf{x}])}_{0} \hat{u} + \cos(\theta) \underbrace{(\hat{u} \times \hat{R}[\mathbf{x}]) \times \hat{u}}_{\hat{R}[\mathbf{x}]} + \sin(\theta) \underbrace{(\hat{u} \times \hat{R}[\mathbf{x}])}_{-\hat{k}} \\ &= \cos(\theta)\hat{R}[\mathbf{x}] - \sin(\theta)\hat{k} \end{aligned}$$

La suma de torques queda:

$$\sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i^* = - \left(mgR_d \left\| \vec{R}[\mathbf{x}] \right\| \right) \left(R_{\hat{u}}(\theta)\hat{R}[\mathbf{x}] \right) \times \hat{k} = \left(mgR_d \left\| \vec{R}[\mathbf{x}] \right\| \right) \cos(\theta)\hat{u}$$



Corte transversal

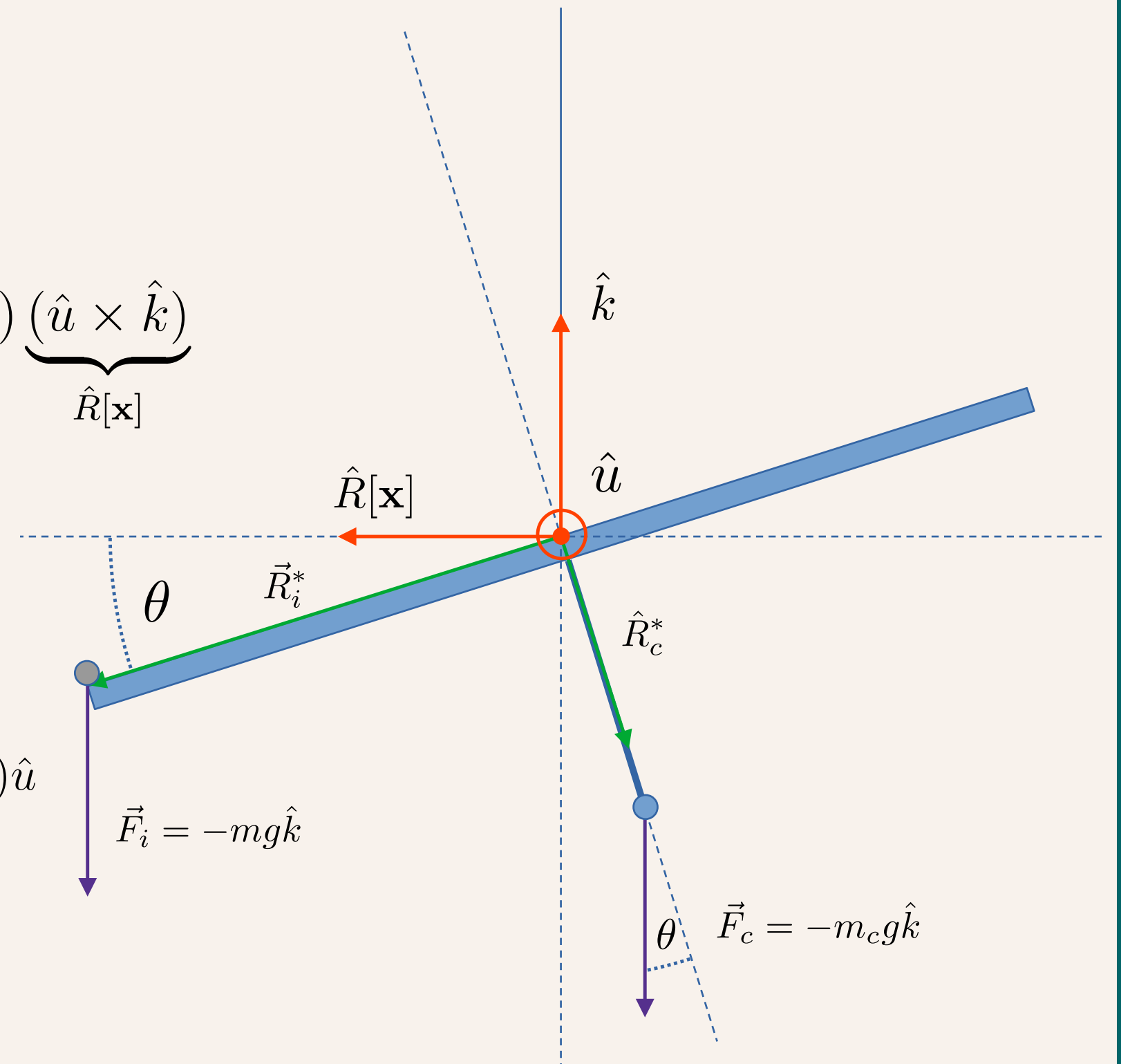
Contrapeso

Aplicación de la rotación:

$$\begin{aligned}\hat{R}_c^* &= R_{\hat{u}}(\theta)(-\hat{k}) = -\underbrace{(\hat{u} \cdot \hat{k})}_{0} \hat{u} - \cos(\theta) \underbrace{(\hat{u} \times \hat{k})}_{\hat{R}[\mathbf{x}]} \times \hat{u} - \sin(\theta) \underbrace{(\hat{u} \times \hat{k})}_{\hat{R}[\mathbf{x}]} \\ &= -\cos(\theta)\hat{k} - \sin(\theta)\hat{R}[\mathbf{x}]\end{aligned}$$

La expresión del torque resulta:

$$\vec{\tau}_c^* = (m_c g R_c) (\cos(\theta) \underbrace{(\hat{k} \times \hat{k})}_0 + \sin(\theta) \underbrace{(\hat{R}[\mathbf{x}] \times \hat{k})}_{-\hat{u}}) = -m_c g R_c \sin(\theta) \hat{u}$$



Corte transversal

Conjuntos complementarios: ángulo de equilibrio

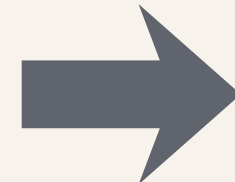
$$\theta = \arctan \left(\frac{R_d}{R_c} \frac{m}{m_c} \left\| \vec{R}[\mathbf{x}] \right\| \right)$$

Para un conjunto y su complementario:

$$\mathbf{x} \cap \overline{\mathbf{x}} = \emptyset$$

$$\mathbf{x} \cup \overline{\mathbf{x}} = (0, 1, \dots, B-1)$$

$$\vec{R}[\mathbf{x}] = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{R}[x_i], \quad \vec{R}[\overline{\mathbf{x}}] = \sum_{i=0}^{B-N-1} \hat{R}[\overline{x}_i]$$



Por simetría, la suma para todas las B posiciones es nula:

$$\vec{R}[\mathbf{x}] + \vec{R}[\overline{\mathbf{x}}] = \sum_{i=0}^{B-1} \hat{R}[i] = \vec{0}$$

$$\vec{R}[\mathbf{x}] = -\vec{R}[\overline{\mathbf{x}}] \implies \left\| \vec{R}[\mathbf{x}] \right\| = \left\| \vec{R}[\overline{\mathbf{x}}] \right\|$$

$$\theta[\mathbf{x}] = \theta[\overline{\mathbf{x}}]$$